Методы решения задач с параметрами

03 декабря 2025г.

Спикер: Попова М. А.

Уметь строить графики основных элементарных функций.
Знать преобразования графиков функций (сдвиги, растяжения и сжатия, действия знаком и модулем на аргумент и функцию).
Знать свойства функций: область определения и множество значений, понятие чётности и нечётности, периодичности, возрастания и убывания, наибольшее и наименьшее значения, экстремумы.
Уметь исследовать функции на основе элементарных свойств (без использования производной) и с использованием производных.

Плюсы и минусы графических методов в сравнении с аналитическими методами

Применение графических методов оправдано в случаях, когда в условии задачи ставится вопрос о количестве решений в зависимости от значений параметра или нахождения значений параметра, при которых решение отсутствует или единственно.

Плюсы графических методов:

- во-первых, построив графический образ, можно определить, как влияет на них и, соответственно, на решение изменение параметра;
- во-вторых, иногда график дает возможность сформулировать аналитически необходимые и достаточные условия для решения поставленной задачи;
- в-третьих, ряд теорем позволяет на основании графической информации делать вполне строгие и обоснованные заключения о количестве решений, об их границах и т.д.

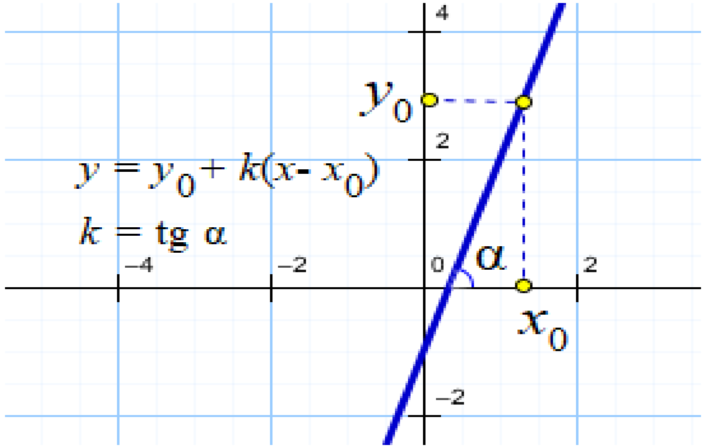
Минусы графических методов: при использовании графических методов возникает вопрос о строгости решения. Требования к строгости должны определяться здравым смыслом. Если результат, полученный графическим методом, вызывает сомнения, его необходимо подкрепить аналитически.

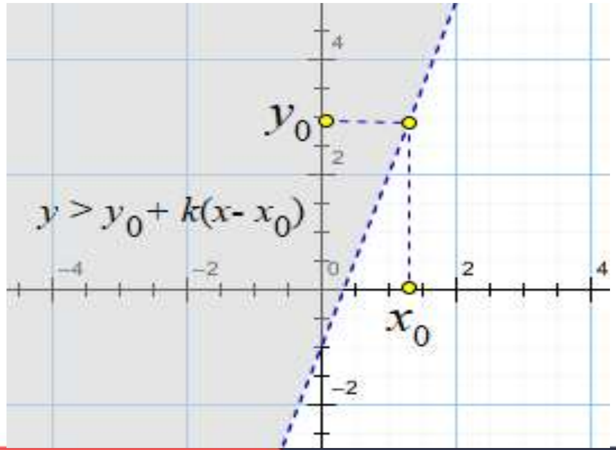
ОСНОВНЫЕ КРИВЫЕ И ИХ ГРАФИКИ

центр непрерывного повышения профессионального мастерства педагогических работников

- Уравнение $y = y_0 + k(x - x_0)$ задает на плоскости Oxy прямую линию, проходящую через точку (x_0, y_0) с угловым коэффициентом (тангенсом угла наклона к оси Ox) равным k.
- В частности, $y = y_0$ - уравнение прямой, параллельной оси Ox и пересекающей ось Oy в точке $(0, y_0)$.
- Неравенство $y > y_0 + k(x - x_0)$ задает часть плоскости, лежащую строго выше прямой $y = y_0 + k(x - x_0)$.
- Неравенство $y < y_0 + k(x - x_0)$ задает часть плоскости, лежащую строго ниже прямой $y = y_0 + k(x - x_0)$.
- Уравнение $x = x_0$ задает прямую, параллельную оси Oy и пересекающую Ox в точке $(x_0, 0)$.
- $x > x_0$ –полуплоскость правее прямой $x = x_0$;
- $x < x_0$ –полуплоскость левее прямой $x = x_0$;
- $x_1 < x < x_2$ - полоса между прямыми $x = x_1$ и $x = x_2$.

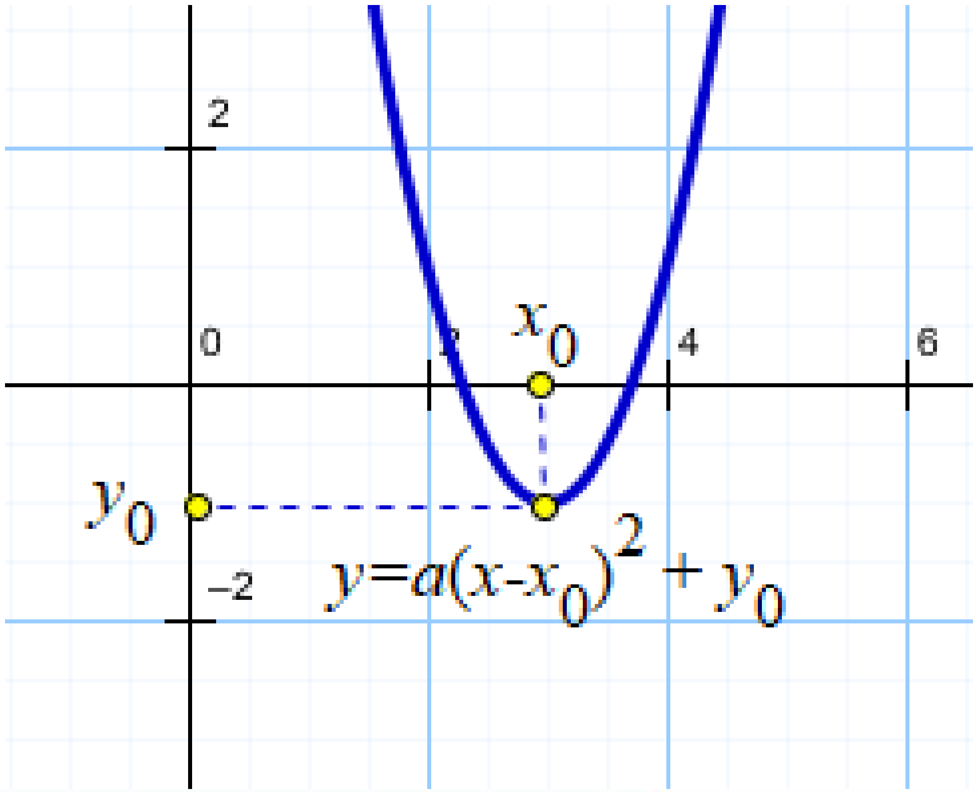
Прямая на плоскости





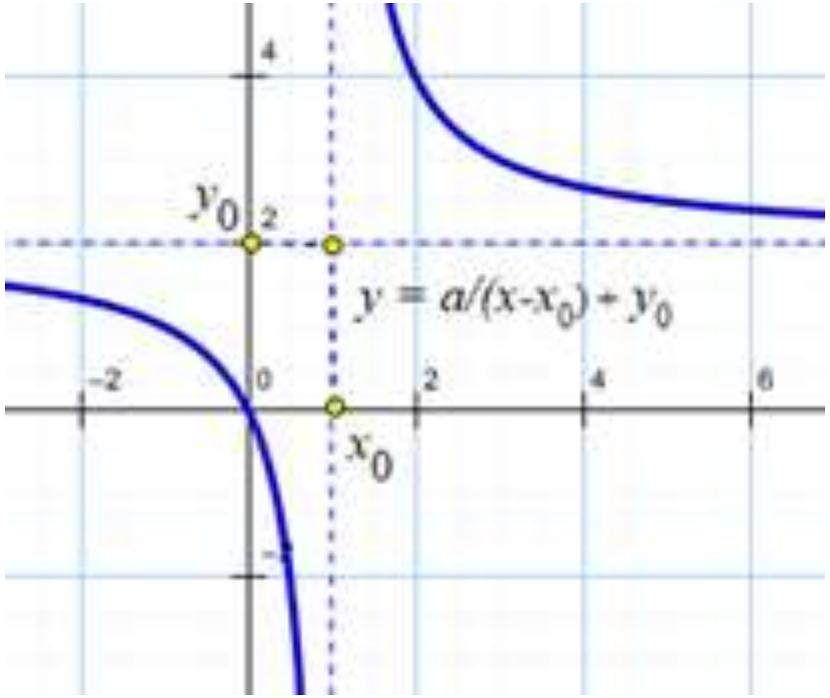
Парабола

- Уравнение $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ задает параболу с вершиной в точке (x_0, y_0) и ветвями, направленными вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$.



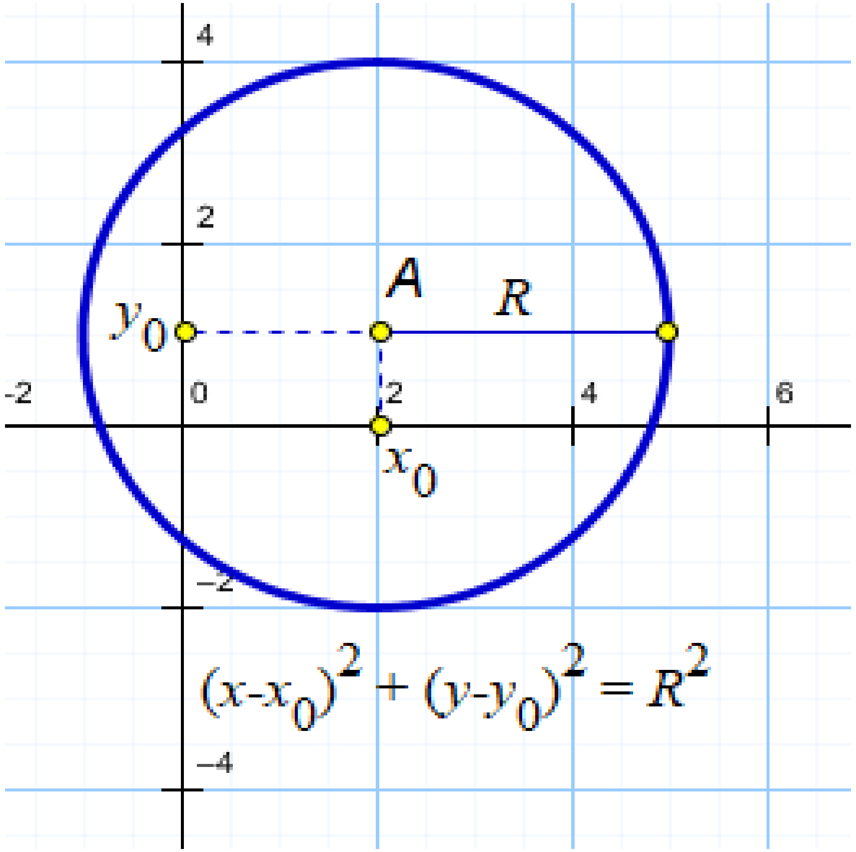
Гипербола

- Уравнение $y = \frac{a}{x - x_0} + y_0$ задает гиперболу с асимптотами $x = x_0$ и $y = y_0$, расположенную в первой и третьей координатных четвертях при $a > 0$, и во второй и четвертой координатных четвертях при $a < 0$.



Окружность

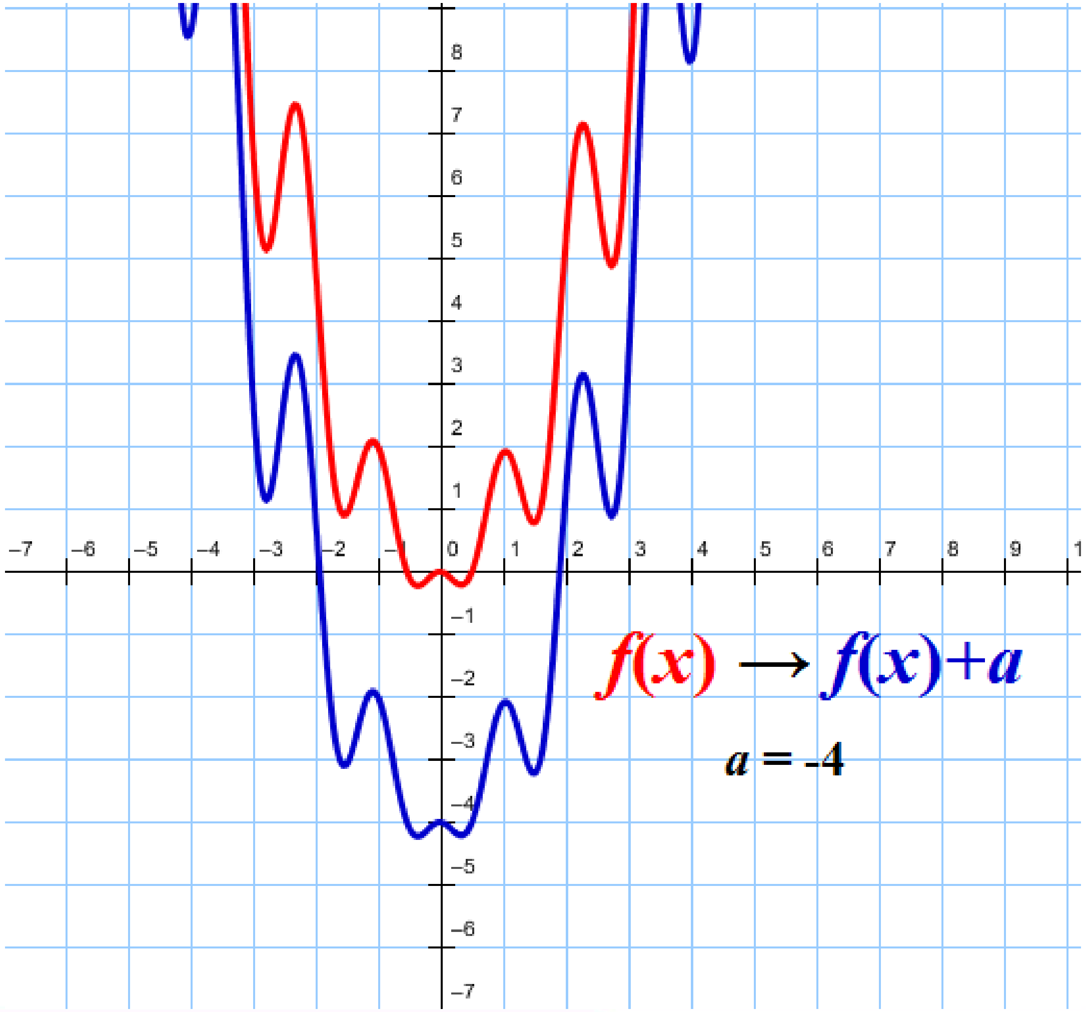
- Уравнение $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ задает **окружность** с центром (x_0, y_0) и радиусом R^2.



ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

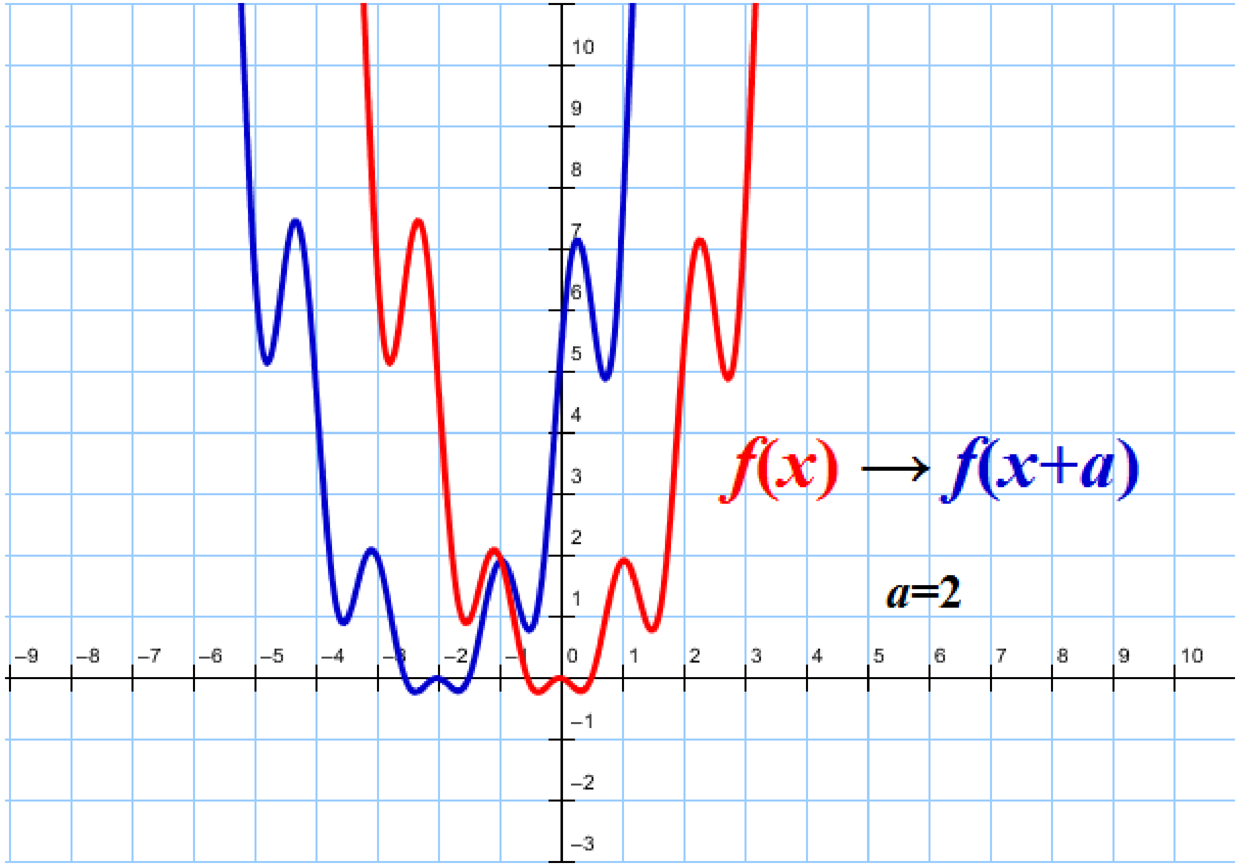
Сдвиг вдоль оси *Oy*

График функции $y = f(x) + a$ получается из графика функции $y = f(x)$ путем его сдвига вдоль оси Oy на a единиц вверх при $a > 0$, и на $-a$ единиц вниз при $a < 0$.



ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

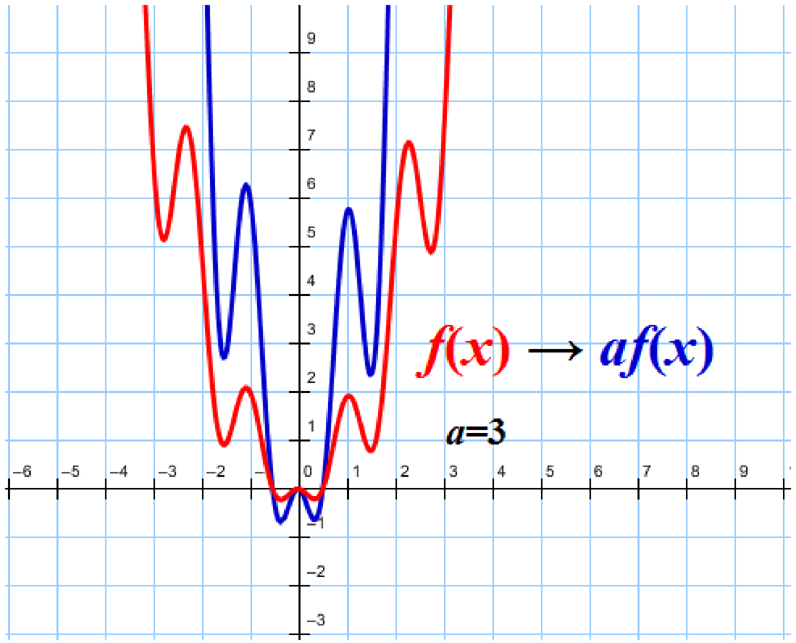
ЦНППМ
центр непрерывного повышения профессионального мастерства педагогических работников

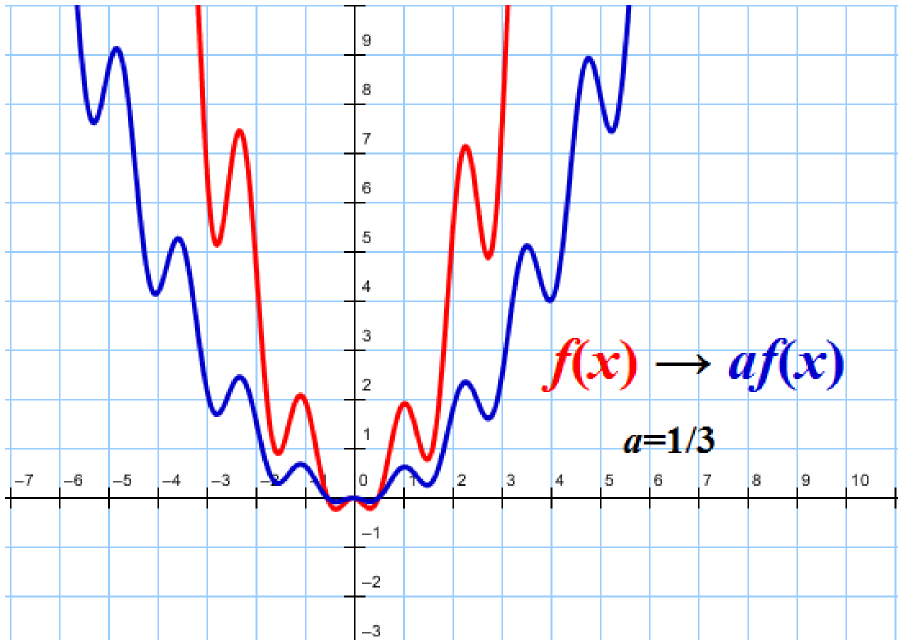


Сдвиг вдоль оси *Ox*

График функции $y = f(x + a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ путем его сдвига вдоль оси Ox на a единиц влево при $a > 0$, и на $-a$ единиц вправо при $a < 0$.

Растяжение, сжатие вдоль оси *Oy*



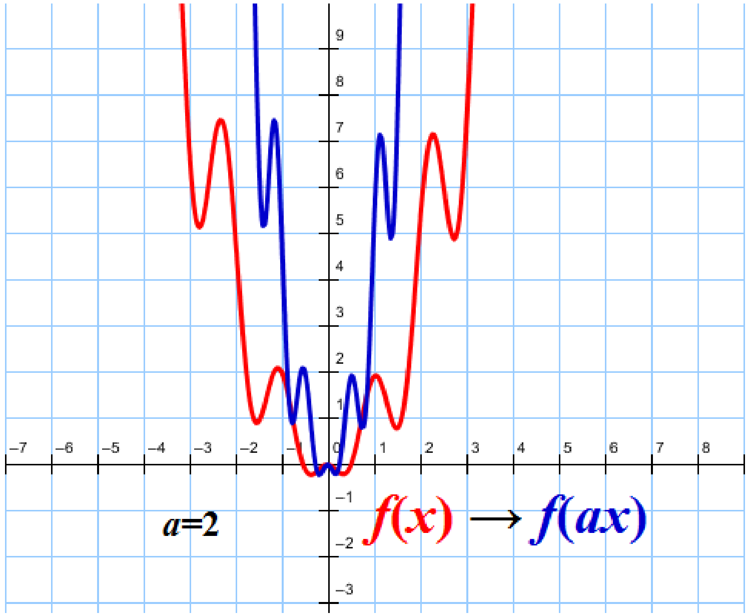


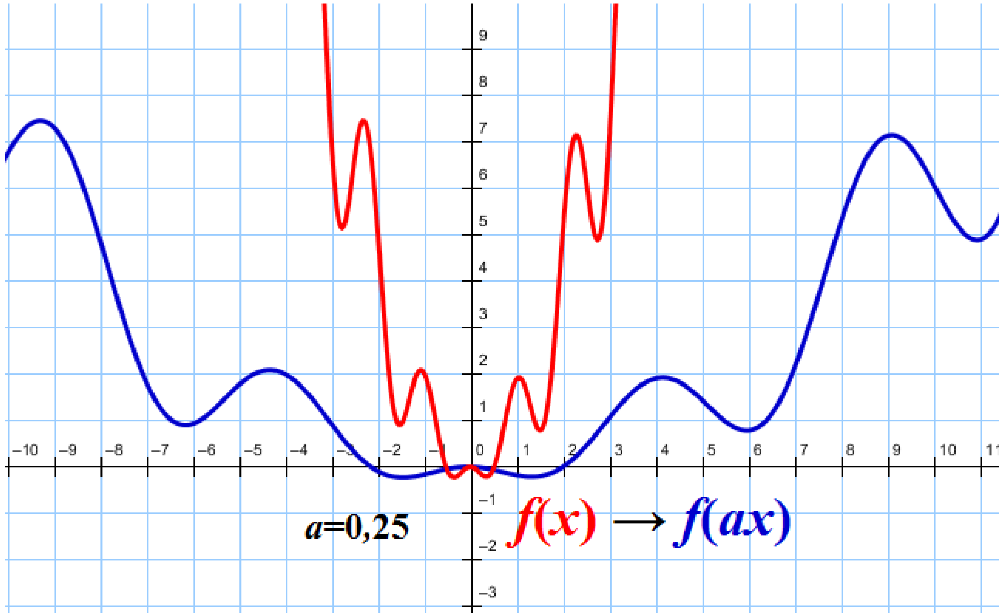
Растяжение в *a* раз вдоль оси *Oy* при $a > 1$

Сжатие в $1/a$ раз вдоль оси *Oy* при $0 < a < 1$

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Растяжение, сжатие вдоль оси *Ox*



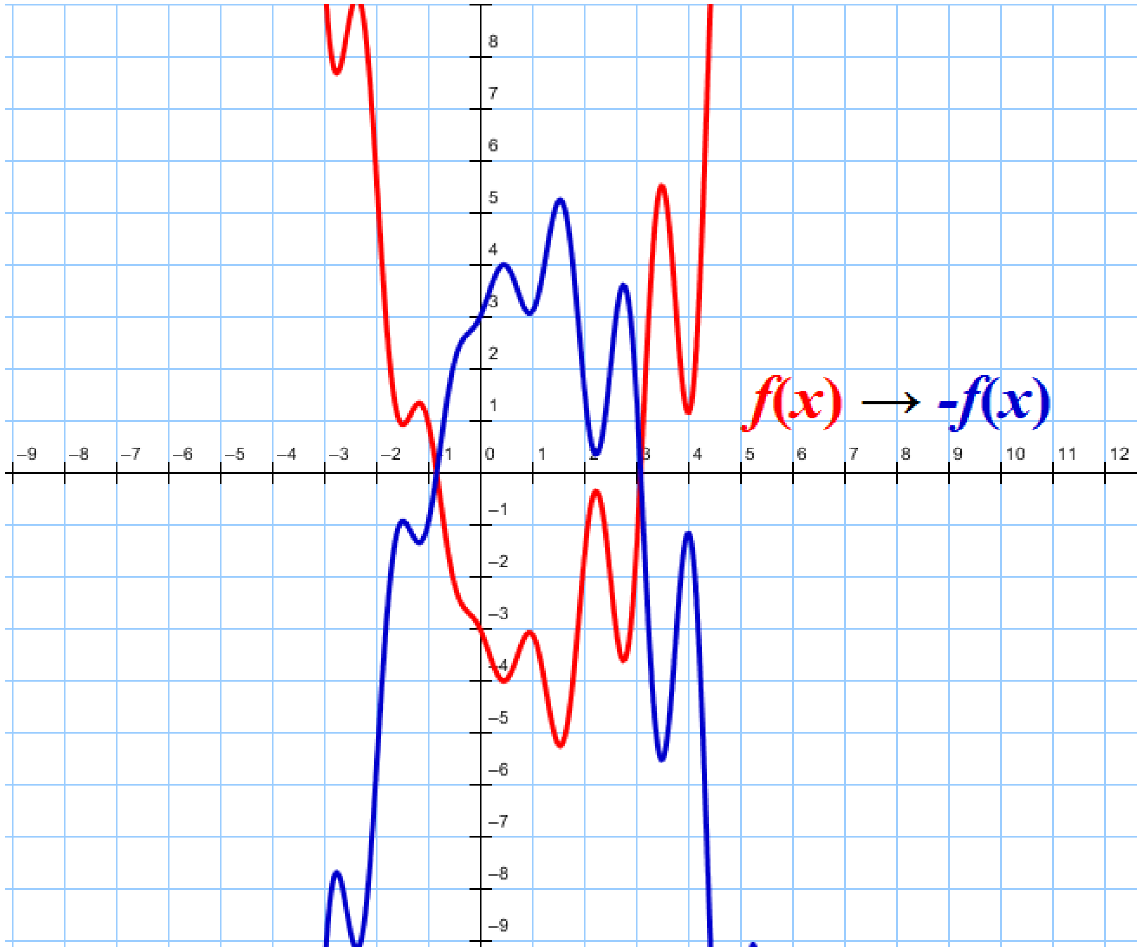


Сжатие в *a* раз *Ox* при *a* > 1

Растяжение в 1/*a* раз вдоль вдоль оси *Ox* при 0 < *a* < 1

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

ЦНППМ
центр непрерывного повышения профессионального мастерства педагогических работников



Симметричное отображение относительно оси *Ox*

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Симметричное отображение относительно оси *Oy*

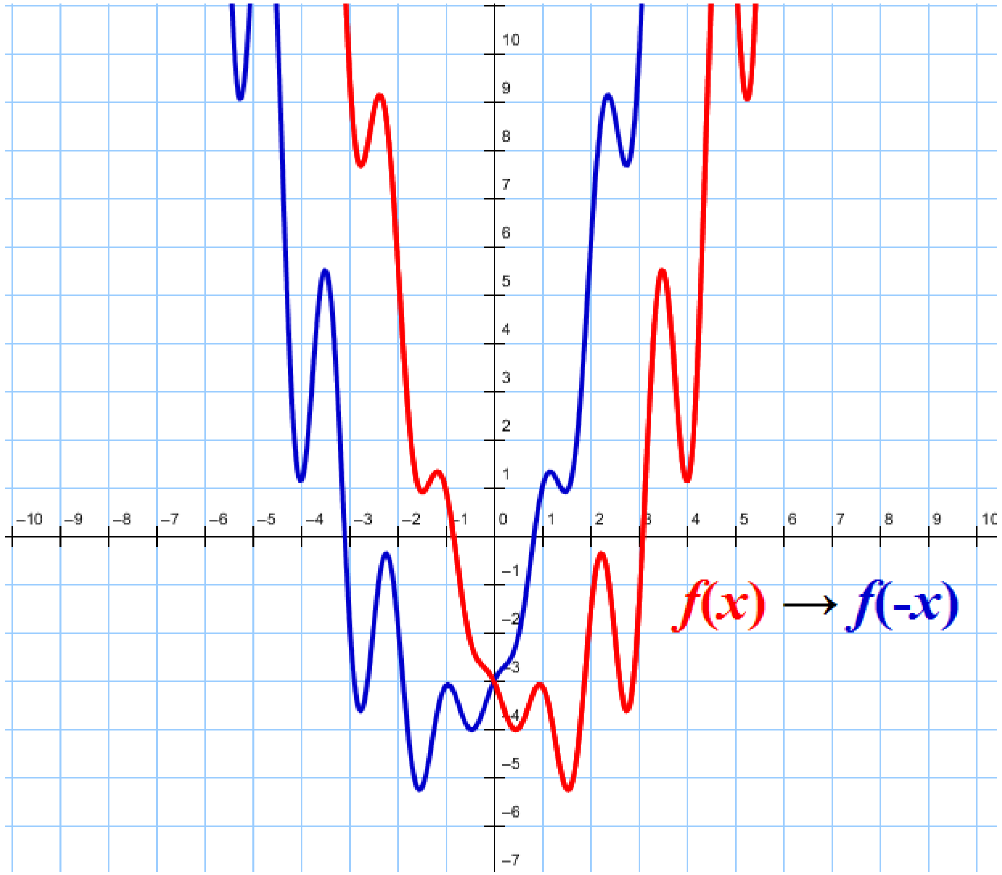
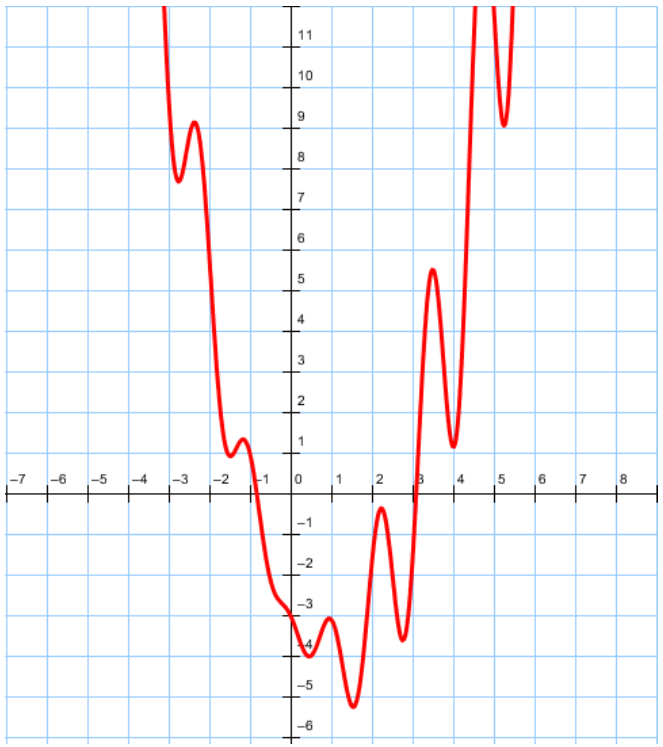
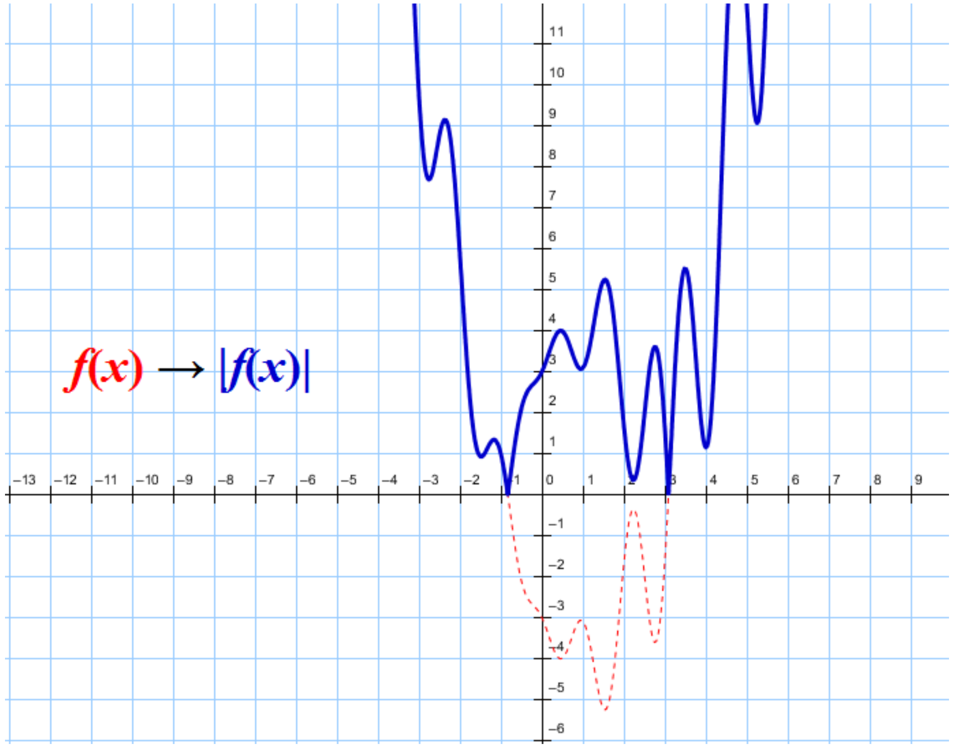


График модуля функции

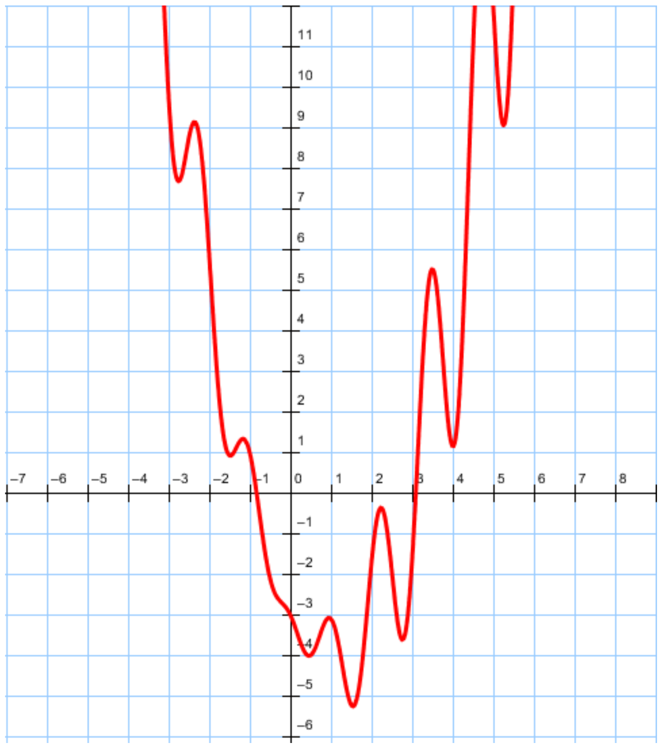


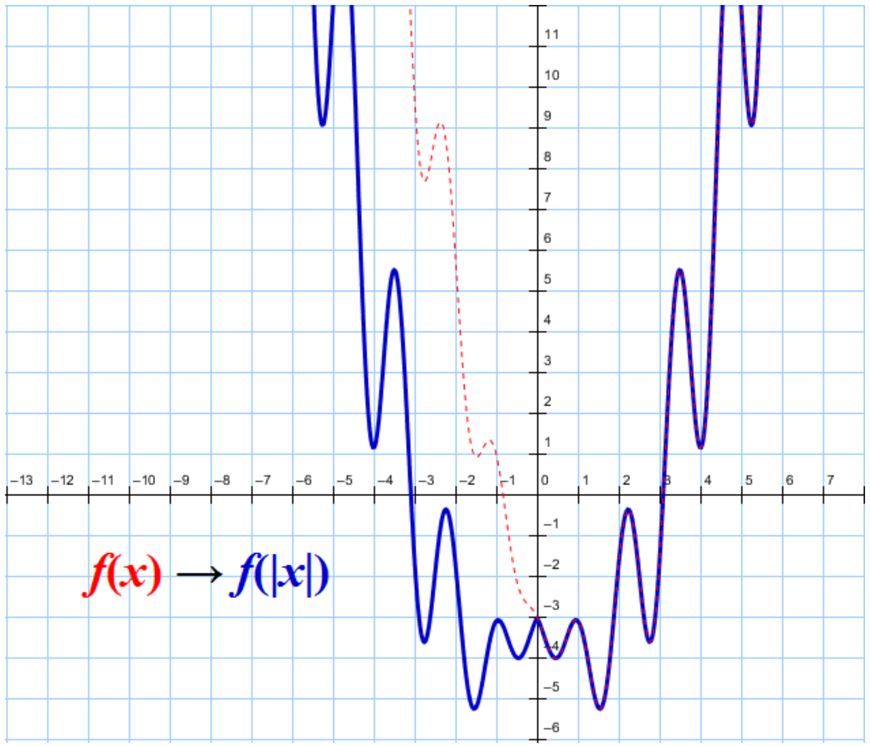


Часть графика функции $y = f(x)$, расположенная в области $y \geq 0$, остаётся на месте. Часть графика функции $y = f(x)$, расположенная в области $y < 0$, симметрично отражается относительно оси Ox.

ГГТУ

График функции с модулем аргумента





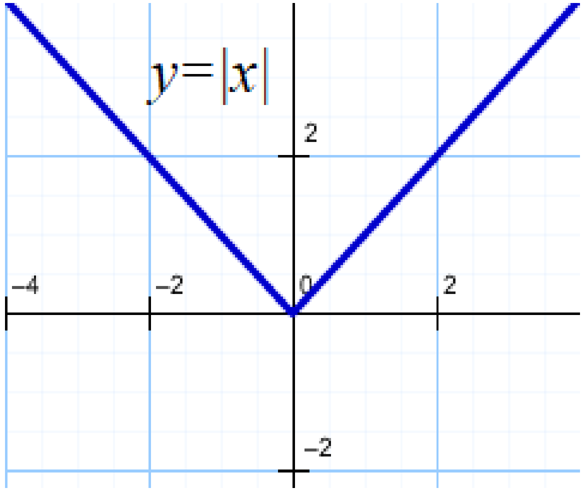
Часть графика функции $y = f(x)$, расположенная в области $x \geq 0$, остаётся на месте и симметрично отражается относительно оси Oy. Ось Oy является осью симметрии графика функции $y = f(|x|)$.

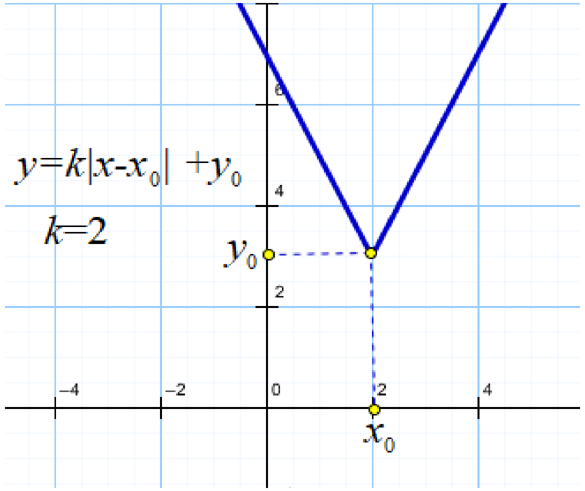
Задача 1. С помощью элементарных преобразований постройте графики функций

1) $y = |x|$ и $y = k|x - x_0| + y_0$; 2) $|y| + |x| = 1$ и) $|y - y_0| + |x - x_0| = a$.

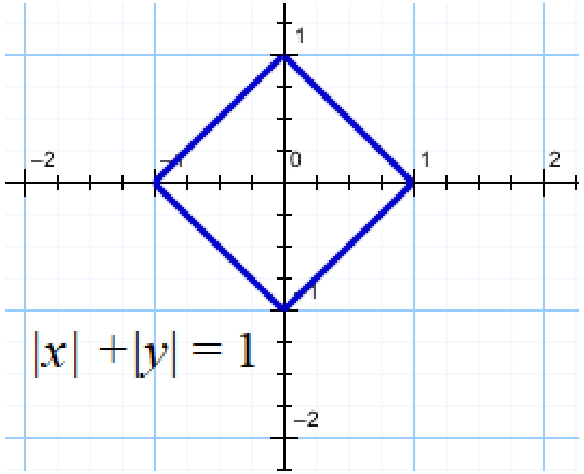
Решение.

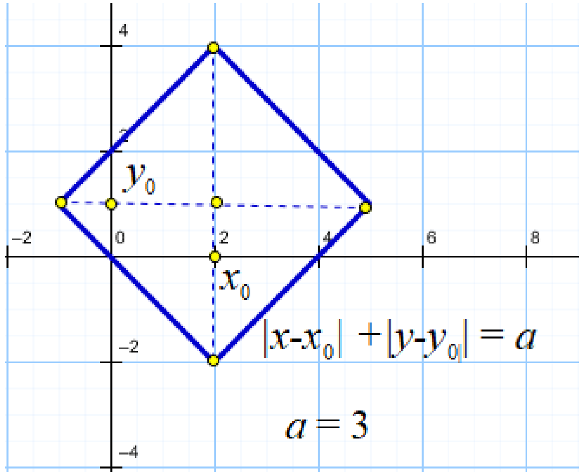
1)





2)

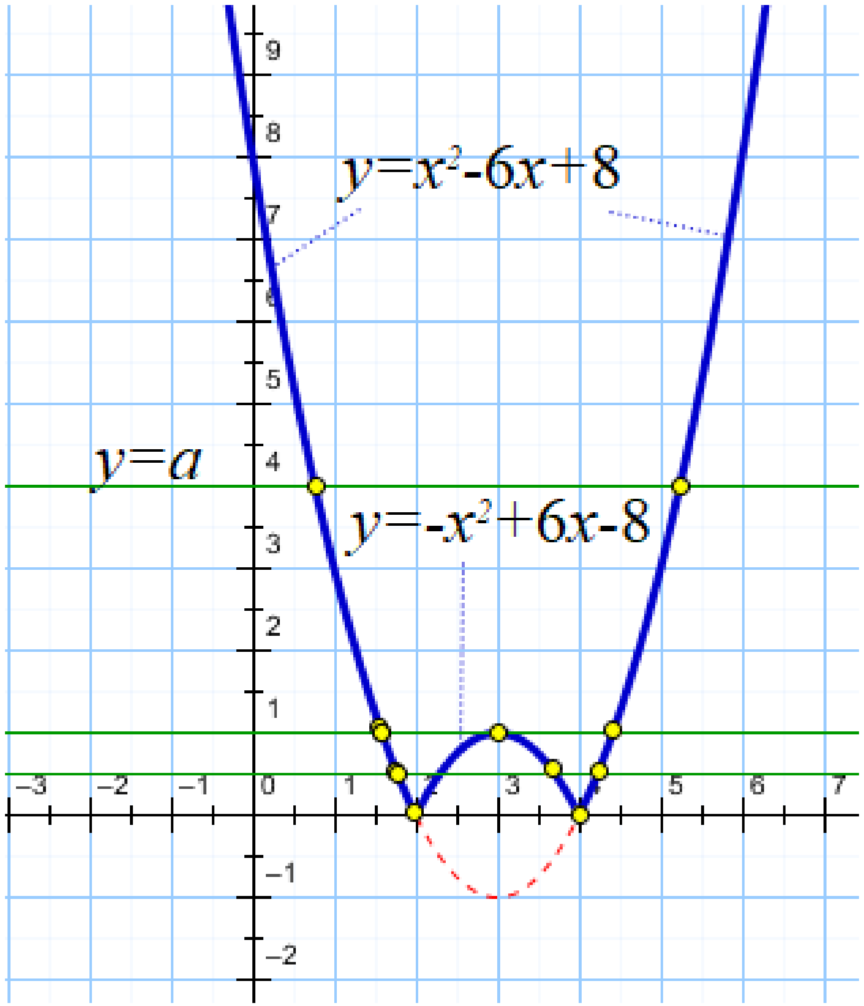




Задача 2. Для любых значений параметра a определите количество корней уравнения $|x^2 - 6x + 8| = a$ и решите его при каждом a.

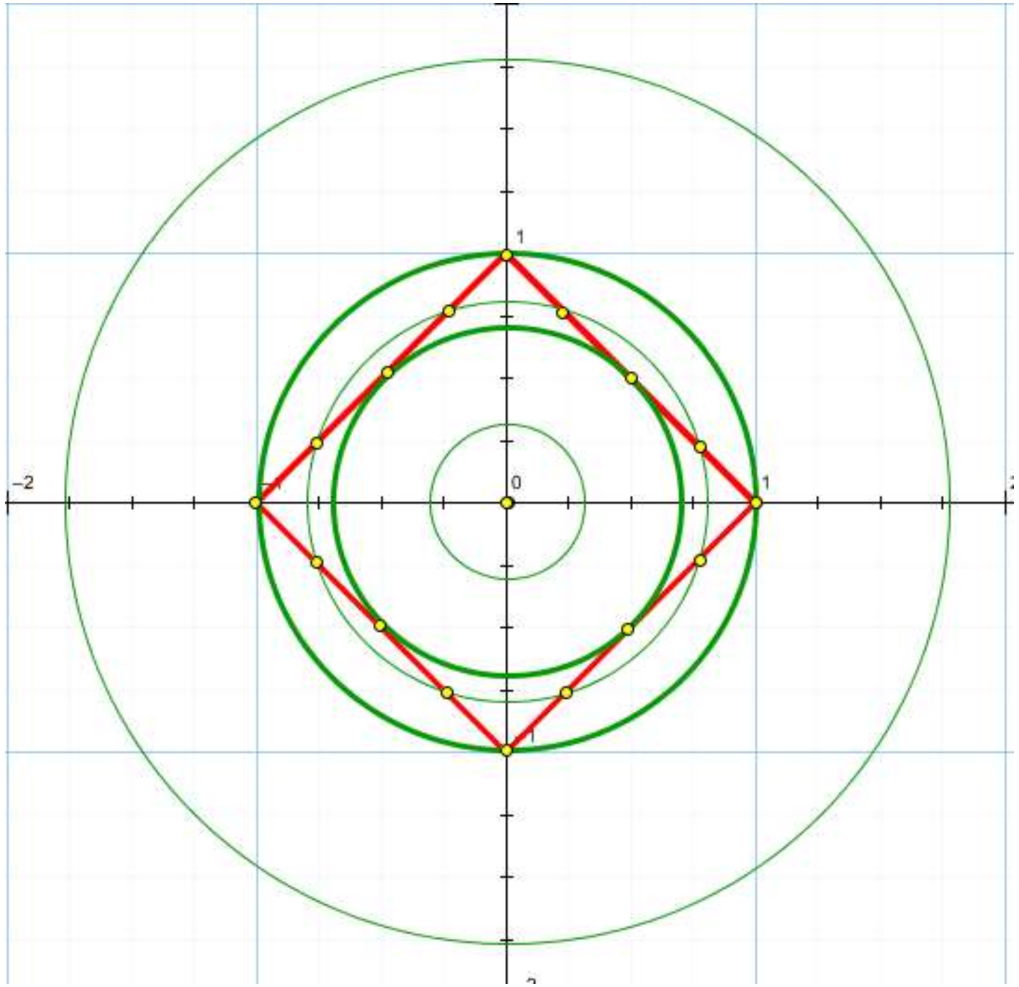
Решение. Построим графики функций $y = |x^2 - 6x + 8|$ и $y = a$.
Уравнение $y = a$ задает семейство прямых, параллельных оси Ox.
При $a < 0$ прямая $y = a$ не имеет точек пересечения с графиком функции $y = |x^2 - 6x + 8|$, следовательно, уравнение $|x^2 - 6x + 8| = a$ не имеет решений.
При $a = 0$ прямая $y = 0$ имеет две точки пересечения с графиком функции $y = |x^2 - 6x + 8|$, это точки $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$.
При $a \in (0; 1)$ прямая $y = a$ имеет четыре точки пересечения с графиком функции $y = |x^2 - 6x + 8|$, это корни уравнений $x^2 - 6x + 8 - a = 0$ и $x^2 - 6x + 8 + a = 0$.
Найдем эти корни: $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{1 + a}$, $x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{1 - a}$.
При $a = 1$ прямая $y = 1$ имеет три точки пересечения с графиком функции $y = |x^2 - 6x + 8|$, это точки $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{2}$ и $x_3 = 3$.
При $a \in (1; +\infty)$ прямая $y = a$ имеет две точки пересечения с графиком функции $y = |x^2 - 6x + 8|$, это корни уравнения $x^2 - 6x + 8 - a = 0$, $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{1 + a}$.

Ответ: при $a \in (-\infty; 0)$ нет решений; при $a = 0$ два решения $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$; при $a \in (0; 1)$ четыре решения $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{1 + a}$, $x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{1 - a}$; при $a = 1$ три решения $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{2}$ и $x_3 = 3$; при $a \in (1; +\infty)$ два решения $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{1 + a}$.



Задача 3. Для любого параметра a определите число решений системы

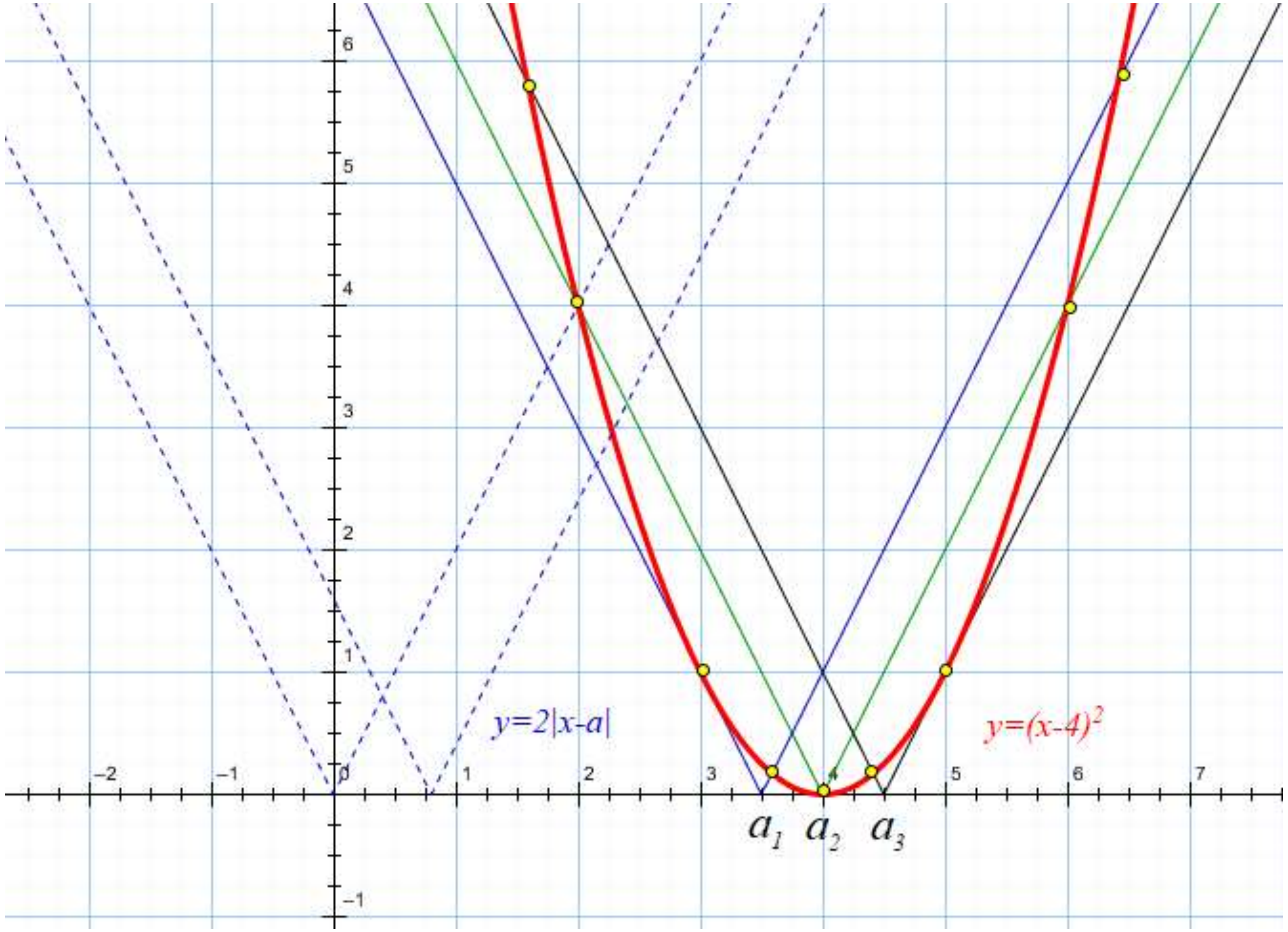
$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$



Ответ: при $|a| > 1$ нет решений;
при $|a| = 1$ четыре решения;
при $|a| \in (\sqrt{2}/2; 1)$ восемь решений;
при $|a| = \sqrt{2}/2$ четыре решения;
при $|a| < \sqrt{2}/2$ нет решений.

Задача 4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$x^2 - 8x = 2|x - a| - 16$ имеет ровно три различных решения.

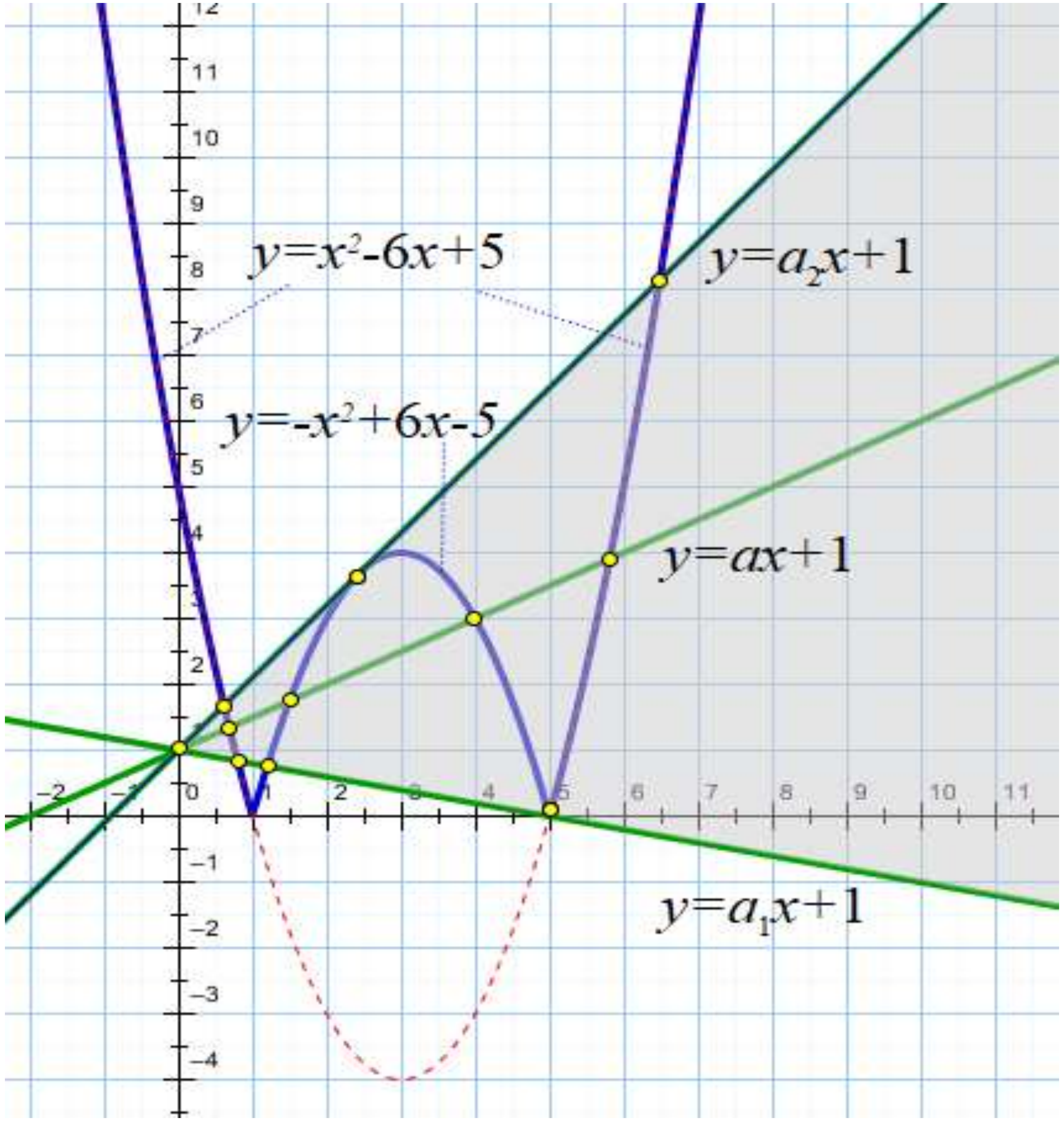


Ответ: 3,5; 4; 4,5.

Задача 4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$|x^2 - 6x + 5| = ax + 1$$

имеет ровно четыре корня.



Решение. Построим графики функций $y = |x^2 - 6x + 5|$ и $y = ax + 1$. Уравнение $y = ax + 1$ задает семейство прямых, проходящих через точку с координатами $(0; 1)$.

Ровно четыре корня уравнение будет иметь в том случае, когда прямая $y = ax + 1$ будет иметь четыре общие точки с графиком функции $y = |x^2 - 6x + 5|$. Такая ситуация возможна при условии, что прямая $y = ax + 1$ занимает промежуточное положение между прямыми $y = a_1x + 1$ и $y = a_2x + 1$, т.е. $a \in (a_1;\ a_2)$.

1) Прямая $y = a_1x + 1$ проходит через точку с координатами $(5; 0)$. Подставляя координаты точки в уравнение прямой, найдем параметр a_1: $0 = 5a_1 + 1$, $a_1 = -0{,}2$.

2) Прямая $y = a_2x + 1$ имеет с графиком функции $y = -x^2 + 6x - 5$ единственную общую точку, т.е. уравнение $-x^2 + 6x - 5 = ax + 1$ при $a = a_2$ имеет единственное решение. Приведем его к виду $x^2 + (a - 6)x + 6 = 0$. Квадратное уравнение имеет единственное решение, если дискриминант равен нулю

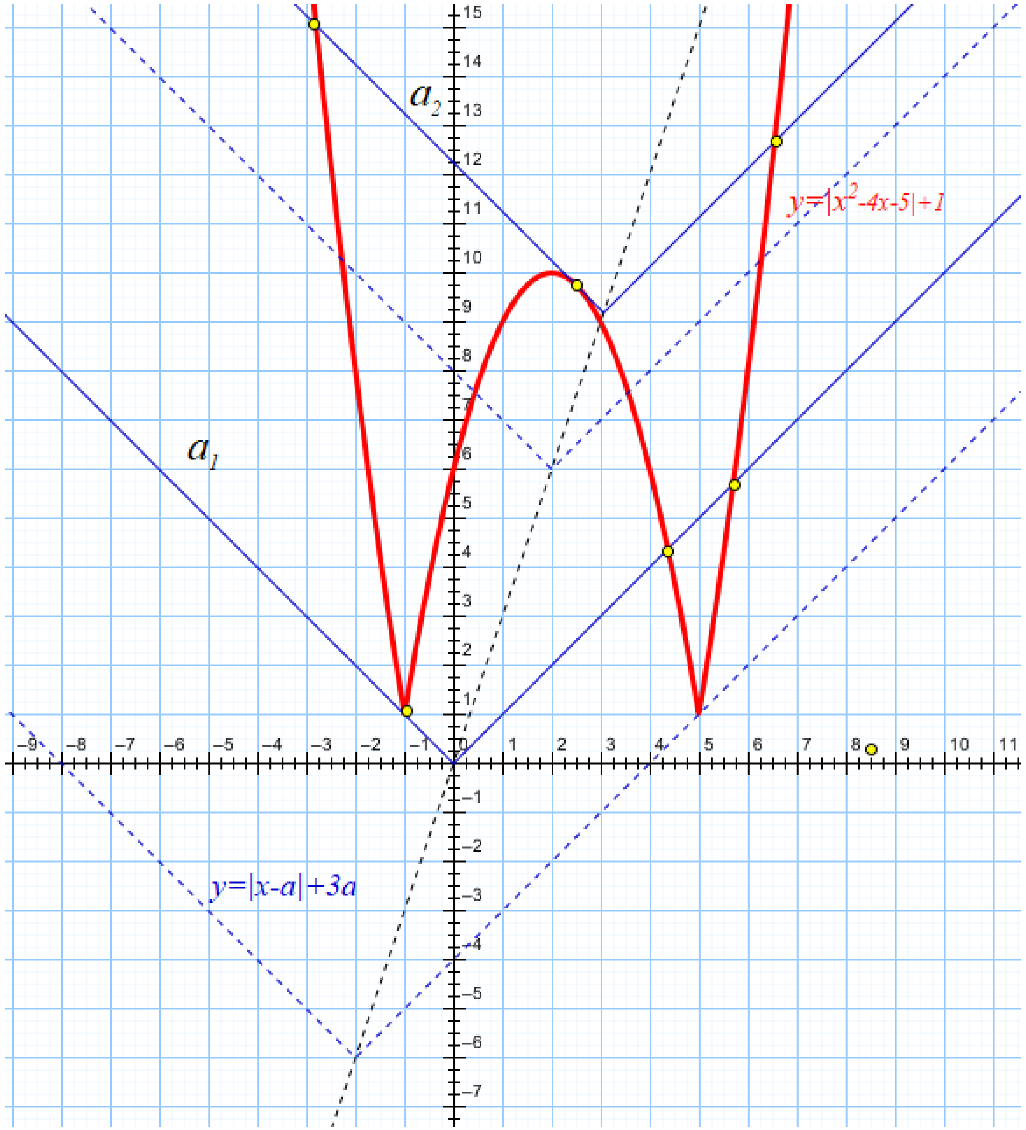
$$D = (a - 6)^2 - 24 = a^2 - 12a + 12 = 0,\ a = 6 \pm 2\sqrt{6}.$$

Выбираем тот корень, для которого $x > 1$, или $(6 - a)/2 > 1$. Этому условию удовлетворяет меньший корень, следовательно, $a_2 = 6 - 2\sqrt{6}$.

Окончательно имеем $a \in \left(-0{,}2;\ 6 - 2\sqrt{6}\right)$.

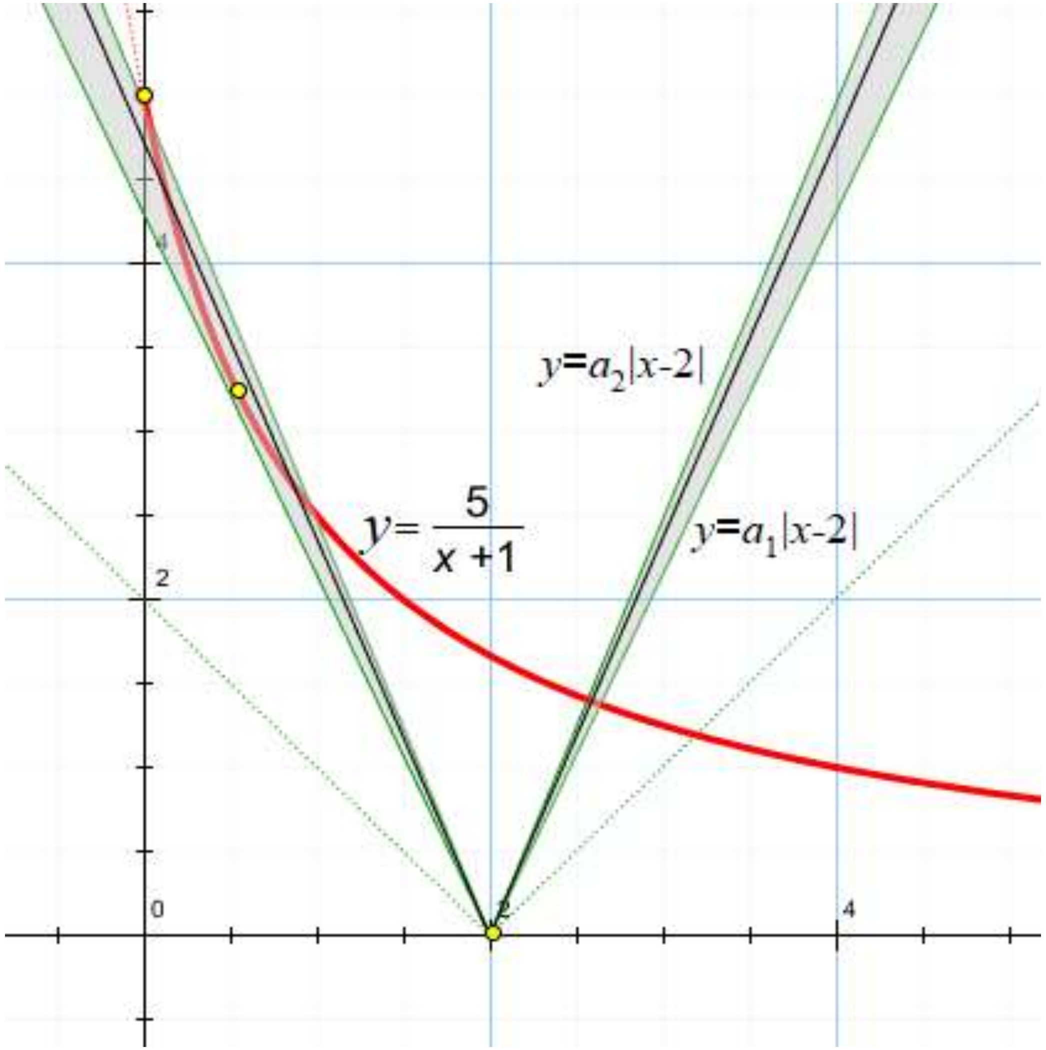
Ответ: $a \in \left(-0{,}2;\ 6 - 2\sqrt{6}\right)$.

Задача 5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|x^2-4x-5|-3a=|x-a|-1$ имеет ровно три различных решения.



Ответ: 0; 49/16.

Задача 6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a|x-2| = \frac{5}{x+1}$ на промежутке $[0;\ +\infty)$ имеет ровно три корня.



Решение. Построим графики функций $y = a|x-2|$ и $y = \frac{5}{x+1}$.

Уравнение $y = \frac{5}{x+1}$ задает гиперболу с асимптотами $x = -1$ и $y = 0$.

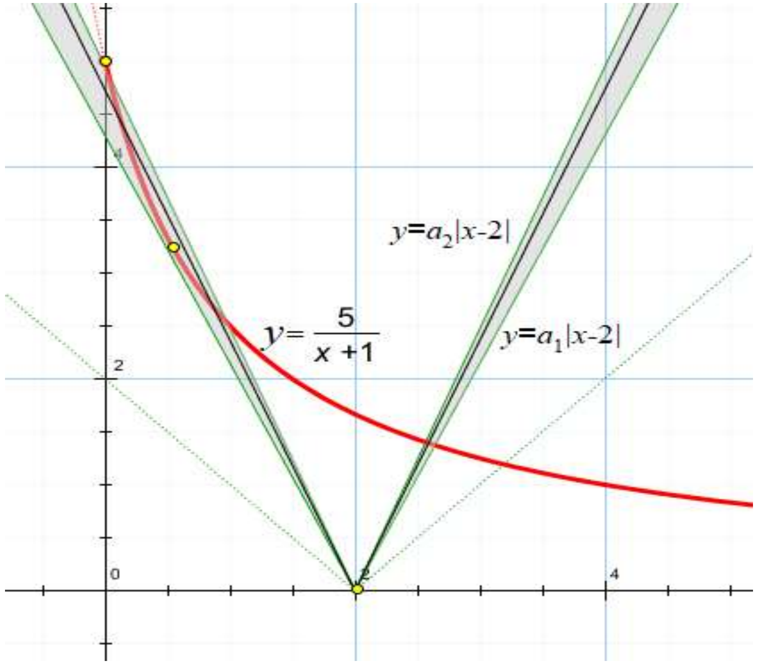
Уравнение $y = a|x-2|$ задает семейство углов с вершиной в точке с координатами $(2; 0)$.

Ровно три корня данное уравнение будет иметь в том случае, когда $a \in (a_1;\ a_2]$.

1) Положение $y = a_1|x-2|$ определяется, тем, что левый луч угла имеет с гиперболой $y = \frac{5}{x+1}$ единственную общую точку. Левый луч угла лежит на прямой $y = -a_1(x-2)$. Приходим к уравнению $\frac{5}{x+1} = -a(x-2)$, которое должно иметь единственное неотрицательное решение. Для неотрицательных x уравнение равносильно следующему $ax^2 - ax - 2a + 5 = 0,\ a > 0$. Квадратное уравнение имеет единственное решение, если дискриминант равен нулю, $D = a^2 + 8a^2 - 20a = 9a^2 - 20a,\ a = 20/9$. Следовательно, $a_1 = 20/9$.

2) Положение $y = a_2|x-2|$ определяется, тем, что левый луч угла проходит через точку пересечения гиперболы с осью Oy, т.е. точку с координатами $(0; 5)$. Подставим координаты этой точки в уравнение прямой $y = -a(x-2)$, $5 = -a(0-2)$, $a_2 = 2{,}5$.

Таким образом, $a \in (20/9;\ 2{,}5]$. **Ответ:** $a \in (20/9;\ 2{,}5]$.



Пример задания ЕГЭ

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}(x-2)(y+2x-4)=|x-2|^3,\\ y=x+a\end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

ЕГЭ 2016

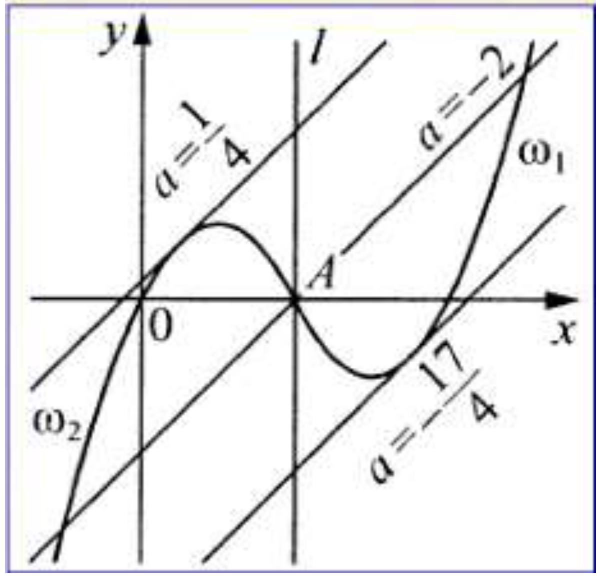
Рассмотрим первое уравнение системы.

Рассмотрим три случая.

1) Если $x>2$, то получаем уравнение $y=x^2-6x+8$.

2) Если $x=2$, то координаты любой точки прямой $x=2$ удовлетворяют уравнению.

3) Если $x<2$, то получаем уравнение $y=-x^2+2x$.



Рассмотрим второе уравнение системы. При каждом значении a оно задаёт прямую m, параллельную прямой $y=x$ или совпадающую с ней.

При $a=-\frac{17}{4}$ и $a=\frac{1}{4}$ прямые m касаются дуг ω_1 и ω_2 соответственно.

Ответ: $-\frac{17}{4}<a<-2;\ -2<a<\frac{1}{4}$.

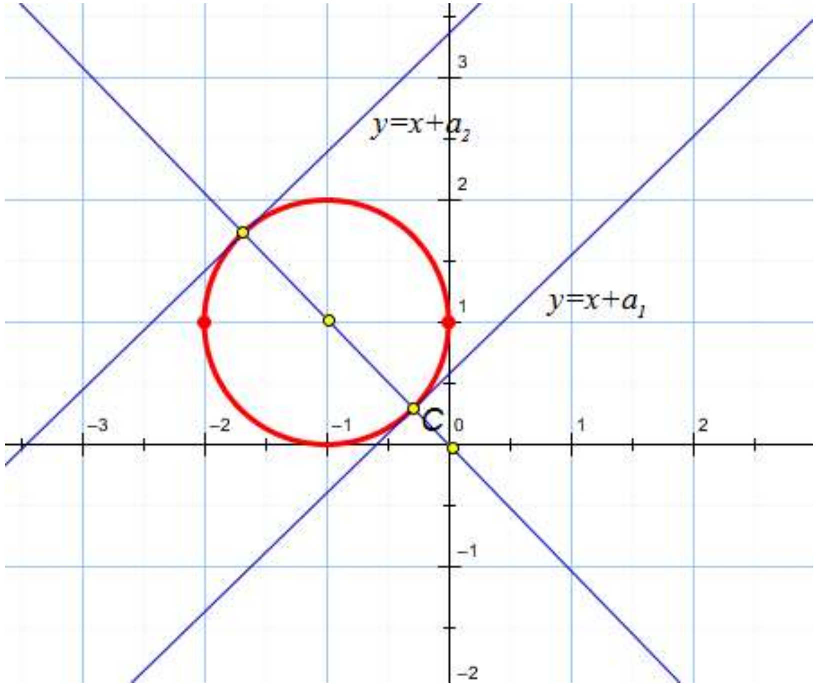
ГГТУ

Выделение полного квадрата − приведение кривых второго порядка к каноническому виду

Задача 7. Найдите все значения параметра a, при котором система

$$\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 - 2y + 1 = 0, \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет единственное решение.



Решение. В первом уравнении системы Выделим полные квадраты:

$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1.$

Получили уравнение окружности с центром в точке $(-1, 1)$ и радиусом 1.

Прямая $y = x + a$ имеет с окружностью единственную общую точку в том случае, когда она касается окружности. Таких прямых будет две. Координаты точек касания можно определить, находя координаты точек пересечения окружности с прямой $y = -x$. Имеем $2(x+1)^2 = 1, x = -1 \pm 1/\sqrt{2}$.

Координаты точек касания: $(-1 \pm 1/\sqrt{2}, 1 \mp 1/\sqrt{2})$.

Значения параметра: $2 \mp \sqrt{2}$.

Ответ: $2 \mp \sqrt{2}$.

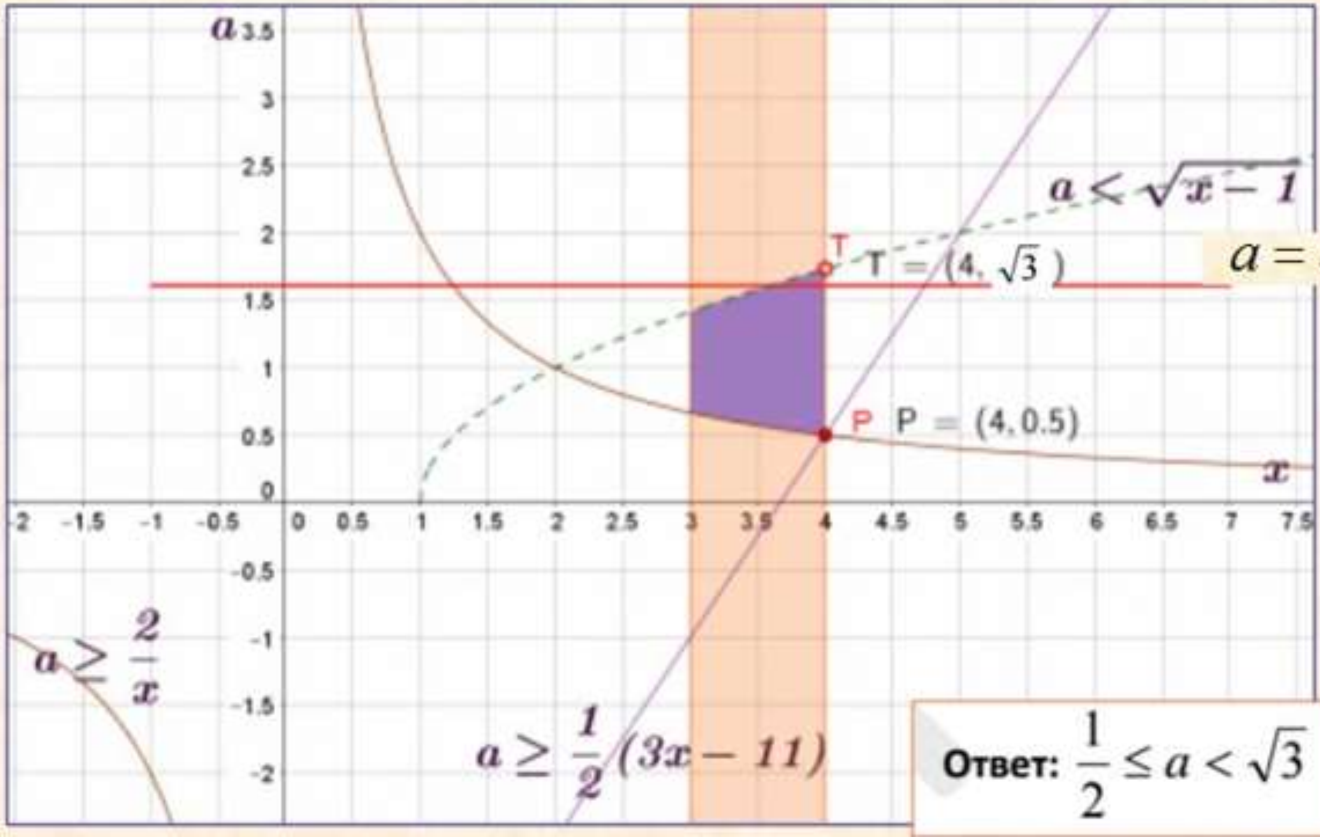
Метод областей

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax \geq 2 \\ \sqrt{x-1} > a \\ 3x \leq 2a + 11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3;4]$

ЕГЭ 2017

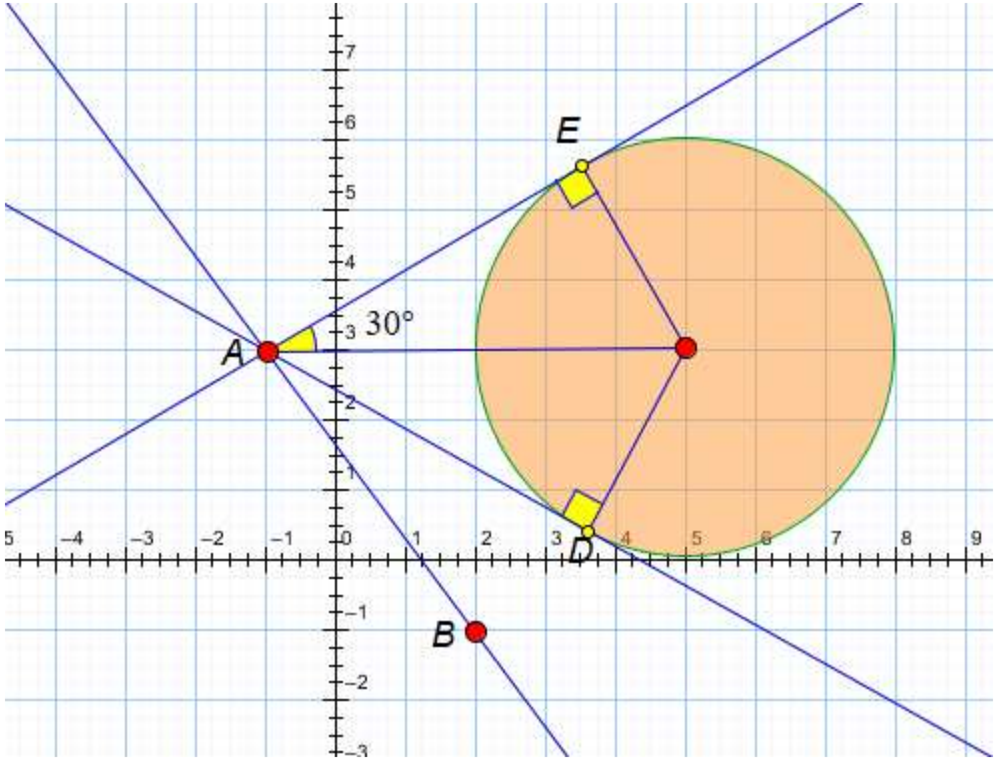


Ответ: $\frac{1}{2} \leq a < \sqrt{3}$

Задача 8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

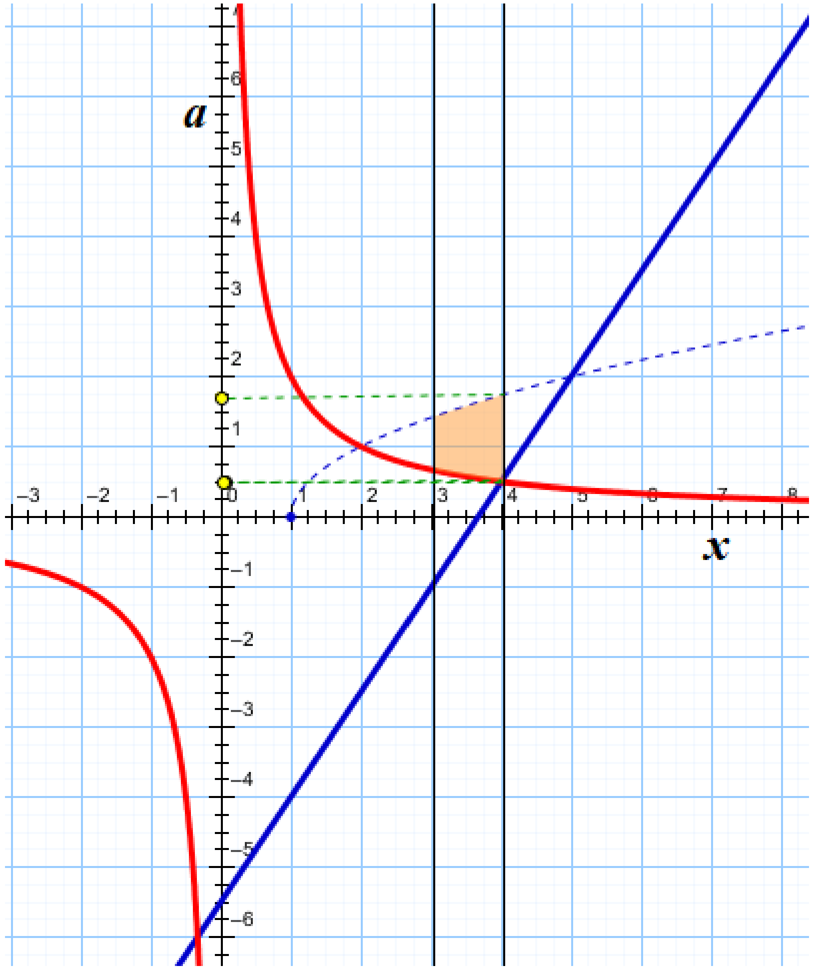
$$\begin{cases}((x-5)^2+(y-3)^2-9)((x-2)^2+(y+1)^2)\le 0,\\ y=ax+a+3\end{cases}$$ не имеет решений.

Решениями первого неравенства на координатной плоскости являются точки круга с радиусом 3 и центром в точке C и точка B (2; -1). Второе уравнение задает прямую, проходящую через точку A (-1; 3).



Ответ: $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{4}{3}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$.

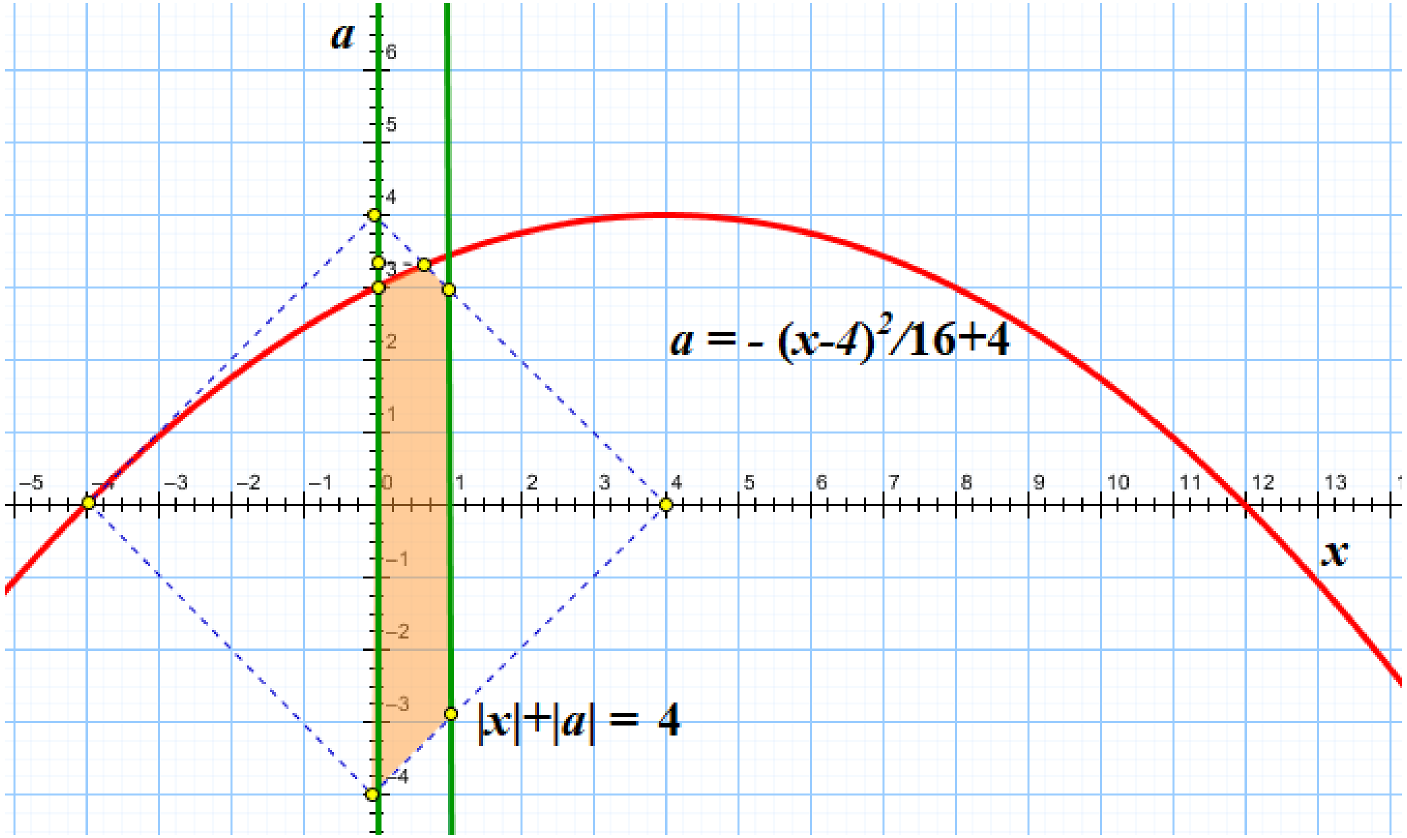
Задача 9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} ax \geq 2, \\ \sqrt{x-1} > a, \\ 3x \leq 2a + 11 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение на отрезке [3; 4].



Ответ: $[0{,}5;\ \sqrt{3})$.

Задача 10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} |x| + |a| < 4, \\ x^2 + 16a \le 8x + 48 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение на отрезке [0; 1].

Ответ: $\left(-4; 8\sqrt{2} - 8\right)$.



ГГТУ

Задача 11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\left||x^2-6x+5|-x^2+6x-13\right|<$$
$$<a-a^2-(x-2)^2+2x-4$$

имеет единственное целое решение.

Решение:

$$\left||(x-3)^2-4|-(x-3)^2-4\right|<a-a^2+1-(x-3)^2$$

Замена: $t=(x-3)^2, t\in\mathbb{Z},\ b=a-a^2+1.$

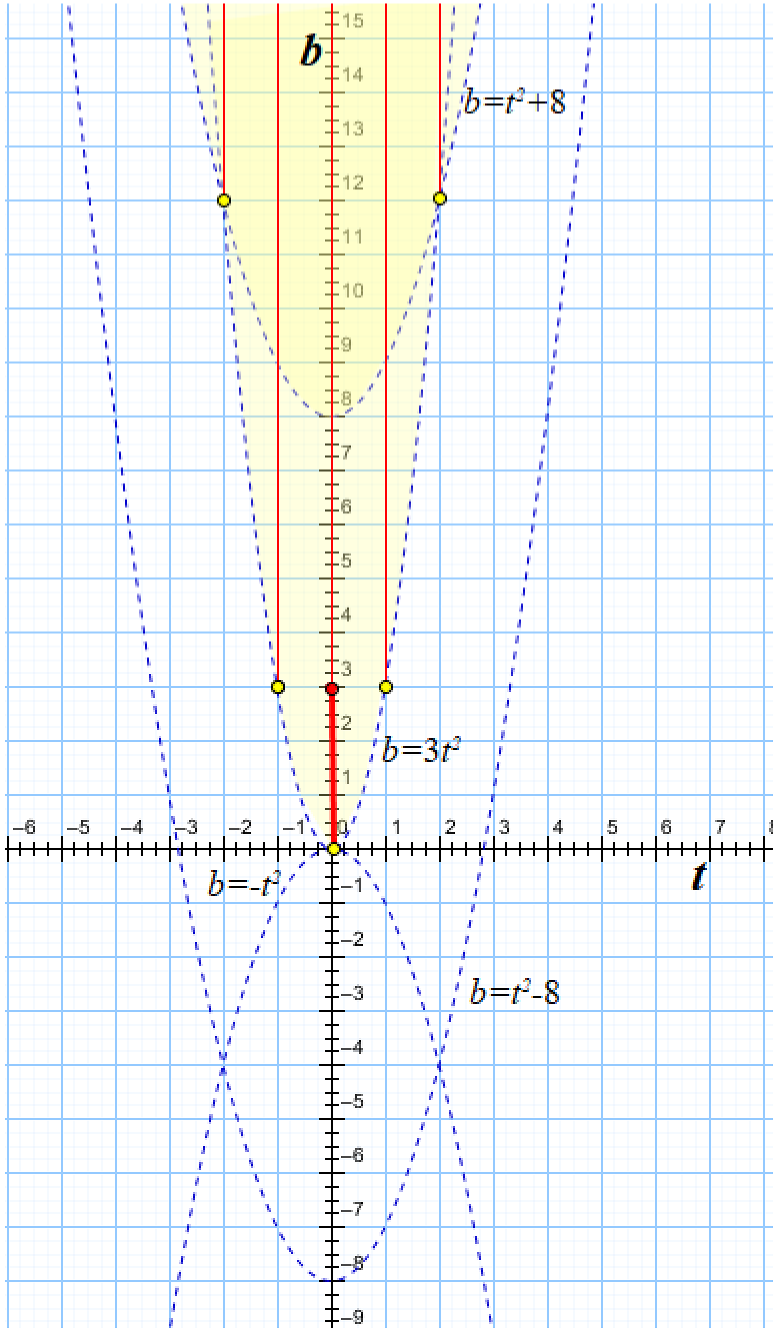
$$\left||t^2-4|-t^2-4\right|<b-t^2$$

$$t^2-b<|t^2-4|-t^2-4<b-t^2$$

$$\begin{cases}|t^2-4|<b+4,\\|t^2-4|>2t^2-b+4,\end{cases}\quad\begin{cases}-b<t^2<b+8,\\b>t^2+8,\\b>3t^2.\end{cases}$$

$$0<b\le 3,\qquad a^2-a-1<0.$$

Ответ: $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.



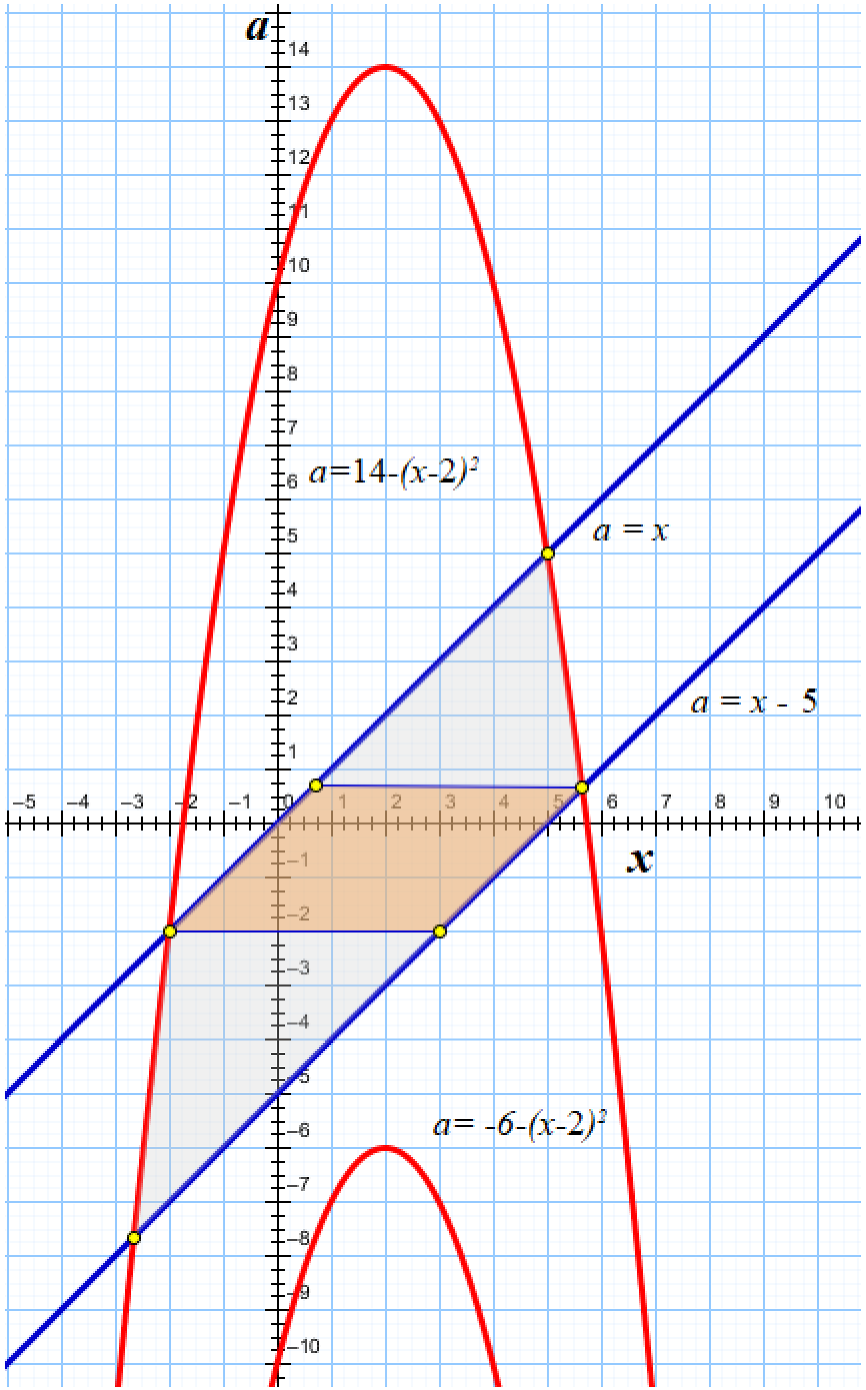
Задача 12. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $|x^2 - 4x + a| \le 10$ выполняется для всех $x \in [a; a+5]$.

Решение: $-10 \le x^2 - 4x + a \le 10$,

$a \le 14 - (x-2)^2$, $a \ge -6 - (x-2)^2$,

$$a \ge x, \qquad a \le x - 5.$$

Ответ: $\left[-2; \frac{-7+\sqrt{69}}{2}\right]$.

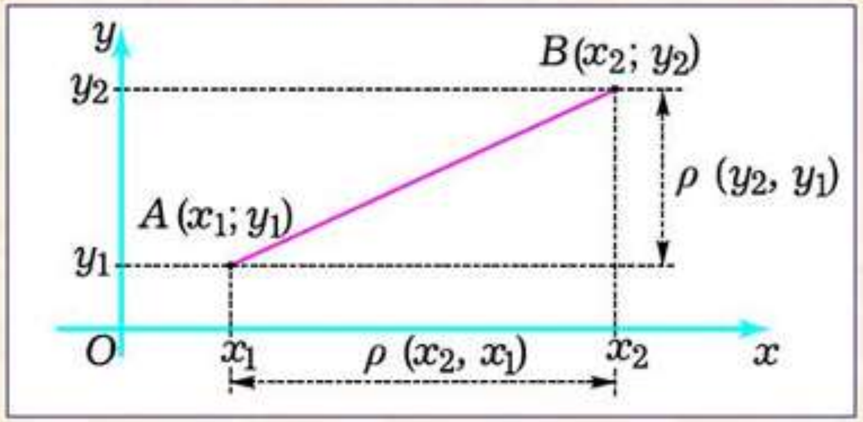


Геометрический метод

Требуется знание соответствия формул и геометрических образов, и величин (формулы расстояний между точками на прямой и на плоскости).

Определение. *Расстояние между точками* $A(x_1; y_1)$ *и* $B(x_2; y_2)$ *на плоскости* (см. рис.) определяется равенством

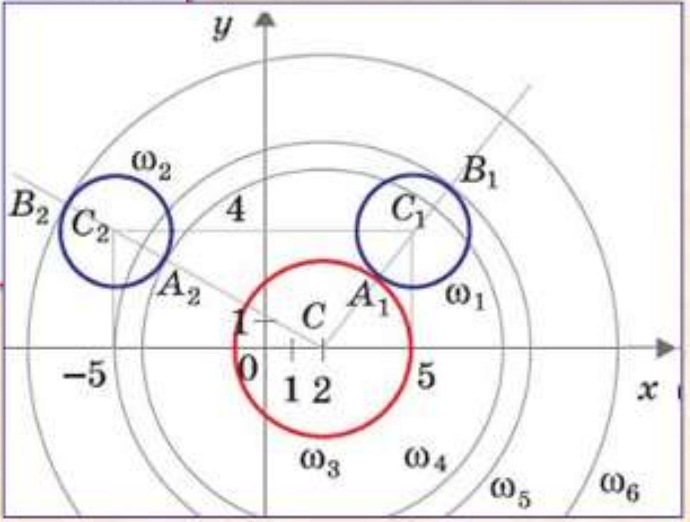
$$\rho(A, B) = \sqrt{\rho(x_1, x_2)^2 + \rho(y_1, y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



1 **Пример.** Найти все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 4, \\ (x - 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.



$CC_1 = 5,\ CC_2 = \sqrt{65},$

$3 < \sqrt{65} - 2 < 7 < \sqrt{65} + 2.$

Ответ: $a = 3,\ a = \sqrt{65} + 2.$

ГГТУ

Геометрический метод

Уравнение отрезка в радикалах

Дадим геометрическую интерпретацию следующему уравнению:

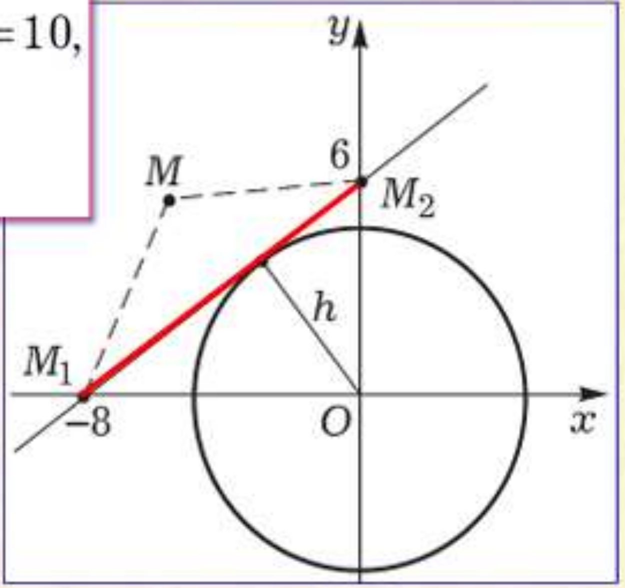
$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}+\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

где x_1, x_2, y_1, y_2 – заданные числа, $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$ одновременно.

Пример . Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+64+16x}+\sqrt{x^2+y^2+36-12y}=10, \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.



Запишем первое уравнение системы в виде

$$\sqrt{(x+8)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-6)^2}=10.$$

Ответ. $-8 \le a < -6$, $a=-\frac{24}{5}$, $a=\frac{24}{5}$, $6 < a \le 8$.

Решение с помощью производной

(ЕГЭ, 2013). Найдите все значения a, при каждом из которых имеет единственный корень уравнение $ax+\sqrt{3-2x-x^2}=4a+2$.

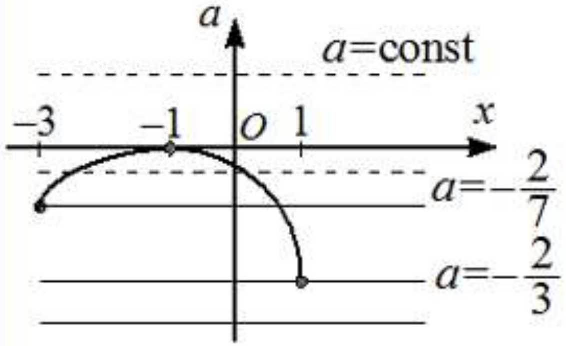
Решение. Так как $ax+\sqrt{3-2x-x^2}=4a+2 \iff \sqrt{3-2x-x^2}-2=a(4-x)$ и при $x=4$ подкоренное выражение отрицательно $3-2\cdot4-4^2<0$, то можно записать $a=\dfrac{\sqrt{3-2x-x^2}-2}{4-x}$.

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-2x-x^2}-2}{4-x}$, $D(f)=[-3;1]$. Функция непрерывна на $D(f)$. Найдём её производную $f'(x)=\dfrac{-1-5x-2\sqrt{3-2x-x^2}}{2\sqrt{3-2x-x^2}\cdot(4-x)^2}$.

Из уравнения $-1-5x-2\sqrt{3-2x-x^2}=0$ получаем $x=-1$.

$-3<x<-1$	$x=-1$	$-1<x<1$
$f'(x)>0$	$f'(x)=0$	$f'(x)<0$

$f(-3)=-\frac{2}{7}$, $f(-1)=0$, $f(1)=-\frac{2}{3}$.



Рисуем эскиз графика в системе координат Oxa и проводим прямые $a=\text{const}$. Определяем значения параметра, при которых эти прямые пересекают график функции $f(x)$ в одной точке.

Ответ: $a\in\left[-\frac{2}{3};-\frac{2}{7}\right)\cup\{0\}$.

Аналитический метод

Задание №17 ЕГЭ 2017 (профильный уровень)

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{4x-1}\cdot\ln(x^2-2x+2-a^2)=0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

Решение. Уравнение равносильно совокупности двух систем:

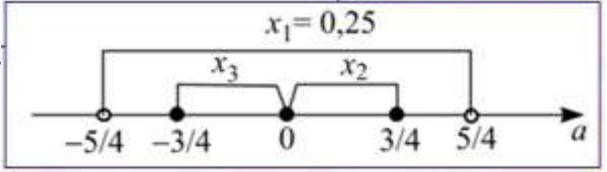
$$(1)\ \begin{cases}4x-1=0,\\ x^2-2x+2-a^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1/4,\\ a^2<(25/16)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1/4,\\ -5/4<a<5/4.\end{cases}$$

и

$$(2)\ \begin{cases}x^2-2x+2-a^2=1,\\ 4x-1\ge 0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2=a^2,\\ x\ge 1/4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1-a,\\ x=1+a,\end{array}\right.\\ x\ge 1/4.\end{cases}$$

Так как интересуют корни на $[0;1]$, то $1/4\le 1-a\le 1$, $0\le a\le 3/4$ и $1/4\le 1+a\le 1$, $-3/4\le a\le 0$.

Имеем $x_1=1/4$ при $-5/4<a<5/4$, $x_2=1-a$ при $0\le a\le 3/4$, $x_3=1+a$ при $-3/4\le a\le 0$; $x_1=x_2$ при $a=3/4$, $x_1=x_3$ при $a=-3/4$, $x_2=x_3=1$ при $a=0$.



Ответ: $a\in\left(-\frac{5}{4};-\frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$.

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{4x-1}\cdot\ln(x^2-2x+2-a^2)=0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

№18). $\sqrt{4x-1}\cdot\ln(x^2-2x+2-a^2)=0.$

ОДЗ: $4x-1\geqslant 0$

$x^2-2x+2-a^2>0$

$4x\geqslant 1$

$$\boxed{x\geqslant\frac{1}{4}}$$

$\sqrt{4x-1}=0$

$4x-1=0$

$x=\frac{1}{4}.$

$\frac{1}{4}\in[0;1]$

Значит уравнение $\sqrt{4x-1}\cdot\ln(x^2-2x+2-a^2)=0$ имеет корень $x_0=\frac{1}{4}$ на отрезке $[0;1]$ всегда (не зависимо от параметра a).

Неверно!

Аналитический метод

ЦНППМ
центр непрерывного повышения профессионального мастерства педагогических работников

Задание №17 ЕГЭ 2017 (профильный уровень)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{4x-3}\cdot\ln(5x-a)=\sqrt{4x-3}\cdot\ln(6x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\,1]$.

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $\begin{cases}\sqrt{4x-3}=0,\\ 6x+a>0,\\ 5x-a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{4},\\ a+\dfrac{9}{2}>0,\\ \dfrac{15}{4}-a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{4},\\ -\dfrac{9}{2}<a<\dfrac{15}{4}.\end{cases}$

Второй случай: $\ln(5x-a)-\ln(6x+a)=0$ при условии $4x-3\geqslant 0$. Получаем:

$$\begin{cases}\ln(5x-a)-\ln(6x+a)=0,\\ 4x-3\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x-a=6x+a,\\ 5x-a>0,\\ 4x\geqslant 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2a,\\ a<0,\\ -8a\geqslant 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2a,\\ a\leqslant -\dfrac{3}{8}.\end{cases}$$

То есть в этом случае $x=-2a$ при $a\leqslant -\dfrac{3}{8}$.

Корень уравнения $x=-2a$ принадлежит отрезку $[0;\,1]$ при $-\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant -\dfrac{3}{8}$.

Корни уравнения $x=\dfrac{3}{4}$ и $x=-2a$ совпадают при $a=-\dfrac{3}{8}$.

Получаем, что исходное уравнение имеет ровно один корень на отрезке $[0;\,1]$ при $-\dfrac{9}{2}<a<-\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{3}{8}\leqslant a<\dfrac{15}{4}$.

Ответ: $\left(-\dfrac{9}{2};\,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left[-\dfrac{3}{8};\,\dfrac{15}{4}\right)$.

Аналитический метод

ЦНППМ
центр непрерывного повышения профессионального мастерства педагогических работников

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1$ имеет ровно три различных корня.

Ответ: $[-2;-1)\cup(-1;1)\cup(1;2]$.

Исходное уравнение равносильно уравнению $3x^2+2ax+1=\left(x^2+ax+1\right)^2$ при условии $x^2+ax+1\geq 0$. Решим уравнение $3x^2+2ax+1=\left(x^2+ax+1\right)^2$:

$$x^4+2ax^3+\left(a^2-1\right)x^2=0;\ x^2(x+a+1)(x+a-1)=0,$$

откуда $x=0$, $x=1-a$ или $x=-1-a$.

Исходное уравнение имеет три корня, когда эти числа различны и для каждого из них выполнено условие $x^2+ax+1\geq 0$.

Рассмотрим условия совпадения корней. При $a=1$ имеем $1-a=0$. При $a=-1$ имеем $-1-a=0$. При остальных значениях a числа 0, $1-a$, $-1-a$ различны.

При $x=0$ получаем: $x^2+ax+1=1\geq 0$ при всех значениях a.

При $x=1-a$ получаем: $x^2+ax+1=(1-a)^2+a(1-a)+1=2-a$.

Это выражение неотрицательно при $a\leq 2$.

При $x=-1-a$ получаем: $x^2+ax+1=(-1-a)^2+a(-1-a)+1=a+2$.

Это выражение неотрицательно при $a\geq -2$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно три различных корня при

$$-2\leq a<-1;\ -1<a<1;\ 1<a\leq 2.$$

Ответ: $[-2;-1)\cup(-1;1)\cup(1;2]$.

Решение аналогичного примера участником экзамена

18. $\sqrt{x^4-x^2+a^2}=x^2+x-a$ $\qquad \begin{cases} \cancel{x^4-x^2+a^2\geq 0} \\ x^2+x-a\geq 0 \end{cases} \quad (1)$

$x^4-(x^2-a^2)=(x^2+(x-a))^2$

$x^4-(x-a)(x+a)=x^4+2x^2(x-a)+(x-a)^2$

$+(x-a)(x+a)+2x^2(x-a)+(x-a)^2=0$

$(x-a)(x+a+2x^2+x-a)=0$

$(x-a)x(x+1)=0$

3 различных решения: $\left[\begin{array}{l} x=a \\ x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$ когда $a\neq 0,\ a\neq -1$

Зачеркнуто лишнее.

При этом все корни должны удовлетворять системе (1)

$x=a:\ \begin{cases} \cancel{a^4-a^2+a^2\geq 0} \\ a^2+a-a\geq 0 \end{cases}$ $\quad x=0:\ \begin{cases} \cancel{a^2\geq 0} \\ -a\geq 0 \end{cases}$ $\quad x=-1:\ \begin{cases} \cancel{1-1+a^2\geq 0} \\ 1-1-a\geq 0 \end{cases}$

то есть $a\leq 0,\ a\neq 0,\ a\neq -1. \Rightarrow a\in(-\infty;-1)\cup(-1;0).$

Ответ: $(-\infty;-1)\cup(-1;0)$.

Подготовительные задания

Подготовительные задания

1 При каждом значении параметра a решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2\sin x + 3}{\cos y} = a, \\ \dfrac{\cos y}{2\sin x + 3} = 2a - 1. \end{cases}$$

2 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax^2 + 4x + a = 3$ имеет более одного корня.

3 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $8x^6 + (a - x)^3 + 2x^2 = x - a$ имеет хотя бы один корень.

4 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$ имеет ровно три различных корня.

5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^3 + \left(\dfrac{4}{x}\right)^3 + 16 = 2a^2$ имеет единственный корень.

6 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x + 2\,|x - 3| - 3\,|x - a - 4| = 7\,|x - a|$ имеет хотя бы один корень.

ГГТУ

Подготовительные задания

7 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4 = 4(x+y), \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 = a^2. \end{cases}$$

8 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $7x + 3|x+a| - 2|x-3| \geqslant 6$ выполняется для любого значения $x \in [0; 7]$.

9 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых число 9 является решением неравенства

$$(x-9)(x-16)\sqrt{a^2 - 8a\log_8(x-8) - 9} \geqslant 0,$$

а число 16 не является решением этого неравенства.

10 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos 2x - 2(a+1)\cos x - 4a - 11 = 0$ имеет корни, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

Ответы к подготовительным заданиям

Задача 18. Подготовительные задания

1. Если $a=1$, то $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ 2\pi k\right)$, $n\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$; при прочих a решений нет. **2.** $a\in(-1;0)\cup(0;4)$. **3.** $a\in\left(-\infty;\ \frac{1}{8}\right]$. **4.** $a\in[-2;-1)\cup(-1;1)\cup(1;2]$. **5.** $a=0$; $a=\pm4$. **6.** $a\in(-\infty;-6]\cup[6;+\infty)$. **7.** $a=\pm(\sqrt{5}-2)$; $a=\pm(\sqrt{5}+2)$. **8.** $a\in(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$. **9.** $a\in[3;9)$. **10.** Если $a\in[-4;-2]$, то $x=\pm\arccos(a+3)+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; при прочих a корней нет.

Спасибо за внимание!