ПЛАНИМЕТРИЯ. Задача №17.

08 октября 2025г.

Спикер: Попова Марина Александровна

Особенности первого пункта задания №17

центр непрерывного повышения профессионального мастерства педагогических работников

1. В случае, если заданная конфигурация не является однозначной, должны быть рассмотрены все ее реализации и должно быть доказано, что в каждой из них выполняется указанное свойство.
2. Возможны две ситуации в условии, описывающем геометрическую конфигурацию до формулировки пункта *а*. Условие до пункта *а* задания:

– не содержит числовых данных (в этом случае свойство, которое нужно доказать в пункте *а*, является общим и выполняется для всех конфигураций описанных в условии);

ЕГЭ 2017

В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точках C и M.
а) Докажите, что $\angle BAM = \angle CAD$.
б) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника AOB, если $AB = \sqrt{10}$, а $BC = 2BM$.

– содержит числовые данные (в этом случае доказываемое свойство обычно является частным и выполняется только для приведенного в условии набора числовых данных и доказательство основывается на вычислениях, то есть сводится к проверке указанного свойства).

ЕГЭ 2017

Сумма оснований трапеции равна 10, а её диагонали равны 6 и 8.
а) Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны.
б) Найдите высоту трапеции.

ГГТУ

Особенности первого пункта задания №17

ЦНППМ

центр непрерывного повышения профессионального мастерства педагогических работников

3. В большинстве заданий решение пункта *а* сводится к доказательству одного из следующих свойств приведенной в условии геометрической конфигурации:

а) подобия указанных треугольников;

б) параллельность или перпендикулярность указанных прямых;

в) равенство указанных углов, отрезков, площадей или их заданное отношение;

г) принадлежность указанной фигуры к определенному типу:

- треугольник является прямоугольным, равнобедренным и т.д.;
- четырехугольник является описанным или вписанным;
- четырехугольник обладает признаками параллелограмма, ромба, трапеции и т.д.;
- точка равноудалена от вершин или сторон многоугольника, то есть является центром вписанной или описанной окружностей;
- прямая содержит указанные точку или отрезок.

ГГТУ

Особенности второго пункта задания №17

центр непрерывного повышения профессионального мастерства педагогических работников

1. Для выполнения второго пункта задачи на нахождение требуемых величин в заданной геометрической конфигурации нужно помнить основные формулы для вычисления соответствующих элементов:

а) для линейных – это теоремы: Пифагора, косинусов, синусов, о секущих и касательных, о хордах; формулы: длины медианы, биссектрисы и т.д.;

б) для угловых – это теоремы: косинусов, синусов, об измерении углов, связанных с окружностью (центральных, вписанных, не вписанных, между хордой и касательной) и т.д.;

в) для площадей – это теоремы: об отношении площадей: – подобных фигур; – фигур, имеющих равные элементы; формулы вычисления площадей треугольника и многоугольников, круга и его частей и т.д.

г) отношений отрезков или площадей фигур – это теоремы: Фалеса, о пропорциональных отрезках, о метрических соотношениях в треугольнике и круге, об отношении соответствующих элементов подобных фигур и т.д.

2. Может оказаться, что пункт *б* задания может быть выполнен без использования свойства, сформулированного в пункте *а*.

ГГТУ

Типичные ошибки в задаче №17

Типичные ошибки участников экзамена связаны в первую очередь с неверным пониманием логики построения доказательства. Например, доказательство пункта *а* задания часто начинается так:

«Пусть точка *О* является серединой отрезка *СК*…» – в случае, когда нужно доказать, что точка делит отрезок пополам;

«Предположим, что треугольник прямоугольный, тогда …» – в случае, когда нужно доказать, что треугольник прямоугольный. И т. д.

При выполнении второго пункта участники:

– допускают ошибки в геометрических формулах (например, в отношении площадей подобных фигур);

– не различают свойства и признаки геометрических фигур (признак прямоугольного треугольника, признаки и свойства ромба, и т. д.);

– не считают нужным доказывать неочевидные геометрические утверждения, используемые в решении, отсутствующие в учебниках.

Кроме этого участники экзамена допускают большое количество ошибок при построении чертежа.

Важно знать (основные теоремы и формулы)

Теорема. Во всяком треугольнике:

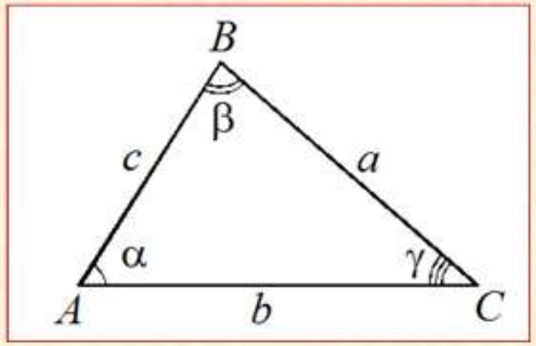
1) против равных сторон лежат равные углы (и наоборот);
2) против большей стороны лежит больший угол (и наоборот).

Теорема (*неравенство треугольника*). Для любых трех точек, расстояние между любыми двумя из этих точек не больше суммы расстояний от каждой из них до третьей точки.

Следствие. Длина любой стороны треугольника меньше суммы длин двух других сторон ($a+b>c,\ a+c>b,\ b+c>a$).

Теорема. Сумма углов треугольника равна 180°: $\alpha+\beta+\gamma=180°.$

Теорема косинусов: $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha.$



Следствие. $\cos\alpha=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$

Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R,$

где R – радиус описанной около треугольника окружности.

Метод площадей

$$1)\ S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c;$$

$$2)\ S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta;$$

$$3)\ S=\frac{abc}{4R};$$

$$4)\ S=pr;$$

$$5)\ S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Важно знать (основные теоремы и формулы)

Из формулы (1) следует, что:

1. Если у треугольников равны основания, то их площади относятся как высоты; если у треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания.

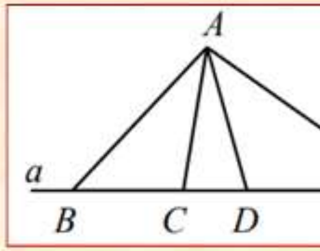


Рис. 1

2. Если треугольники ABC и ADE имеют общую вершину A, а их стороны BC и DE, противолежащие вершине A, лежат на одной прямой (рис. 1), то $\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}}=\frac{BC}{DE}$.

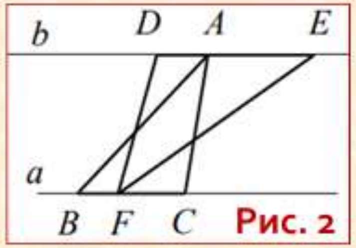


Рис. 2

3. Если треугольники ABC и FDE расположены так, что их стороны $BC||DE$, а вершина A лежит на прямой DE, а вершина F на прямой BC (рис. 2), то $\frac{S_{ABC}}{S_{FDE}}=\frac{BC}{DE}$.

Теорема. Если два треугольника подобны, то отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия.

Важно знать (основные теоремы и формулы)

Из формулы (2) следует, что:

4. Если треугольники *ABC* и *ADE* имеют равный (или дополнительный) угол, то их площади относятся как произведения сторон, содержащих этот угол (рис. 3а, 3б и 3в):

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{AB \cdot AC}{AD \cdot AE}.$$

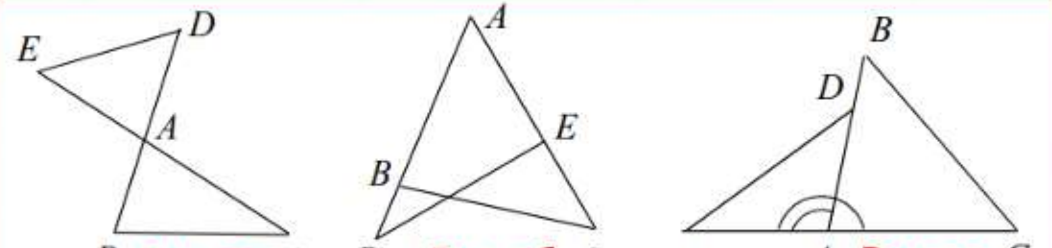


Рис. 3а   Рис. 3б   Рис. 3в

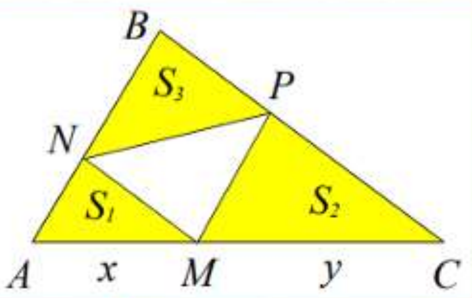
2 Опорная задача

Даны две стороны $a = 2$ и $b = 3$ треугольника и угол A, равный 30^o. Найдите третью сторону треугольника c.

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{7}}{2}$.

3 Опорная задача

Через точку M основания AC треугольника ABC проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Точки N и P – точки пересечения этих прямых со сторонами треугольника. Найдите площадь треугольников ABC и NBP, если площади треугольников ANM и MPC равны соответственно S_1 и S_2.



Ответ: $S_{ABC} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$, $S_{NBP} = \sqrt{S_1 S_2}$.

Пример задания 16 из вариантов ЕГЭ 2015 и его решение

4

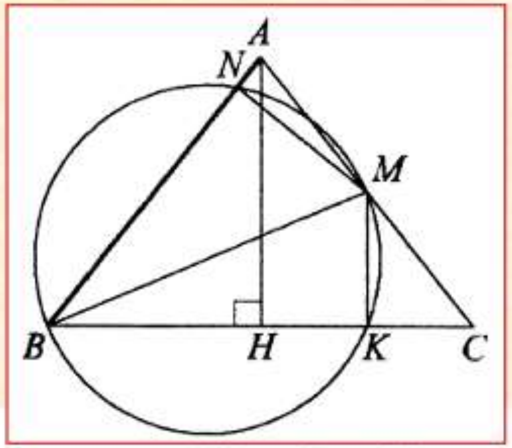
Окружность, построенная на медиане BM равнобедренного треугольника ABC как на диаметре, второй раз пересекает основание BC в точке K.

а) Докажите, что отрезок BK втрое больше отрезка CK.

б) Пусть указанная окружность пересекает сторону AB в точке N. Найдите AB, если $BK=9$ и $BN=11$. (ЕГЭ, 2015)

а) Пусть AH — высота треугольника ABC. Точка K лежит на окружности с диаметром BM, поэтому $\angle BKM=90°$, значит, прямые MK и AH параллельны. MK – средняя линия треугольника AHC. Тогда K — середина CH, следовательно,

$$CK=\frac{1}{2}CH=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}BC=\frac{1}{4}BC,\quad BK=3CK.$$



б) Положим $AB=AC=2x$, $\angle BAC=\alpha$. Тогда $AM=x$, $AN=2x-11$. В прямоугольном треугольнике AMN: $\cos\alpha=\dfrac{AN}{AM}=\dfrac{2x-11}{x}$.

Имеем $BC=BK+CK=9+3=12$, значит, по теореме косинусов

$$\cos\alpha=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\ AC}=\frac{4x^2+4x^2-12^2}{2\ 2x\ 2x}=\frac{x^2-18}{x^2}.$$ Из уравнения $\dfrac{x^2-18}{x^2}=\dfrac{2x-11}{x}$

находим, что $x=2$ или $x=9$. В первом случае $AN=2x-11=-7$. Второе решение удовлетворяет условию задачи. Следовательно, $AB=2x=18$.

Ответ: б) 18.

Свойства средней линии.

Теоремы. 1. Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна половине этой стороны.

2. Средняя линия отсекает от треугольника треугольник подобный исходному, коэффициент подобия равен 1/2.

Свойства медианы.

Теоремы. 1. Во всяком треугольнике медианы пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Формула длины медианы. $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

Свойства биссектрисы.

Теоремы. 1. Биссектриса есть геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла.

2. Во всяком треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке, являющейся центром вписанной в треугольник окружности.

3. Биссектриса любого внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$.

4. ***Формула длины биссектрисы.*** Длина l_a биссектрисы AD вычисляется по формуле l_a а) $l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$

б) $l_a = \sqrt{ab - c_a c_b}$, *где* c_a *и* c_b *— отрезки стороны с, на которые рассекает её биссектриса.*

Задачи для самостоятельного решения

5 **Опорная задача**

Длины двух сторон треугольника равны 11 и 23. Медиана, проведённая к третьей стороне, равна 10. Найдите длину третьей стороны.

Ответ: 30.

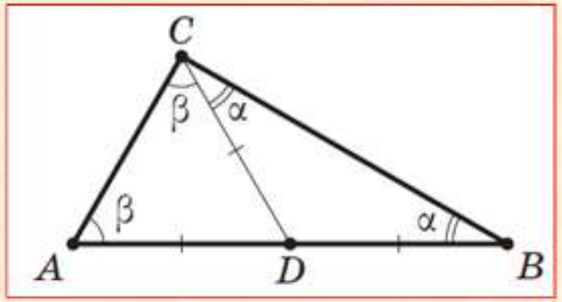
6 **Опорная задача**

Длины двух сторон треугольника равны 6 и 8. Медианы, проведённые к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найдите длину третьей стороны.

Ответ: $2\sqrt{5}$.

7 **Опорная задача**

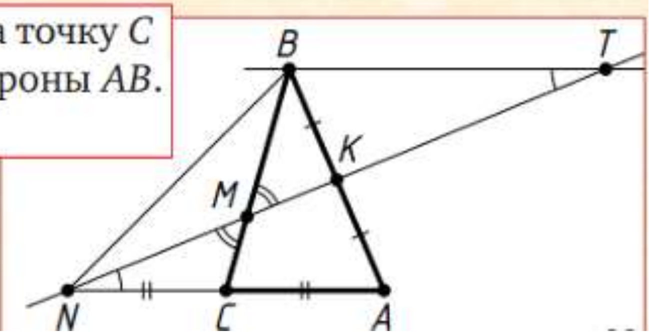
Докажите, что если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то угол, противолежащий этой стороне, прямой, т. е. треугольник прямоугольный.



8

Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взята точка N, причём $CN = AC$; точка K — середина стороны AB. В каком отношении прямая KN делит сторону BC?

Ответ: 2 : 1, считая от точки B.



Задачи для самостоятельного решения

9

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 12. Найдите стороны треугольника ABC.

Ответ: $3\sqrt{13}$; $6\sqrt{13}$; $9\sqrt{5}$.

10

Прямая, проходящая через середину M стороны BC треугольника ABC, пересекает сторону AC в точке K, причём $\angle CMK = \angle BAC$.

СтатГрад, 2022

а) Докажите, что $\angle BAM = \angle BKM$.

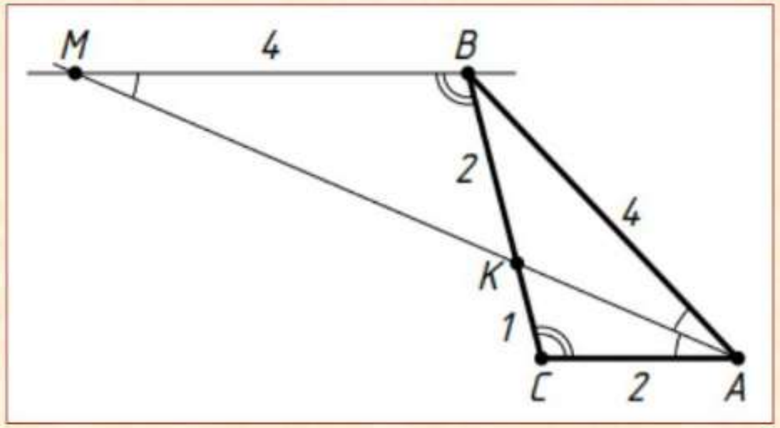
б) Найдите медиану MN треугольника CKM, если $BC = 20$, $AB = \sqrt{87}$, $CK = 8$.

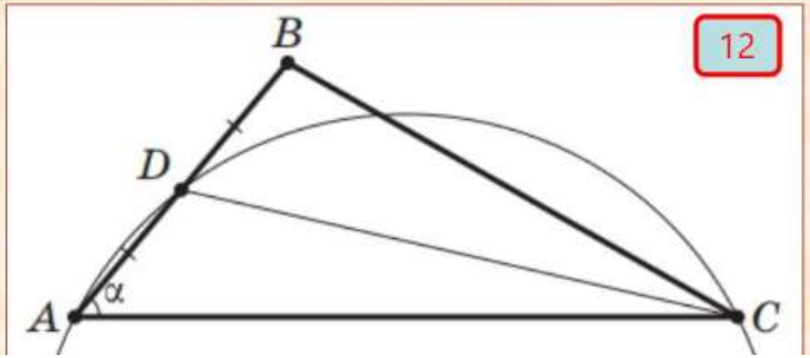
Ответ: б) 6,4.

11

Дан треугольник ABC. Известно, что $AB = 4$, $AC = 2$ и $BC = 3$. Биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке K. Прямая, проходящая через точку B параллельно AC, пересекает продолжение биссектрисы AK в точке M. Найдите KM.

Ответ: $2\sqrt{6}$.



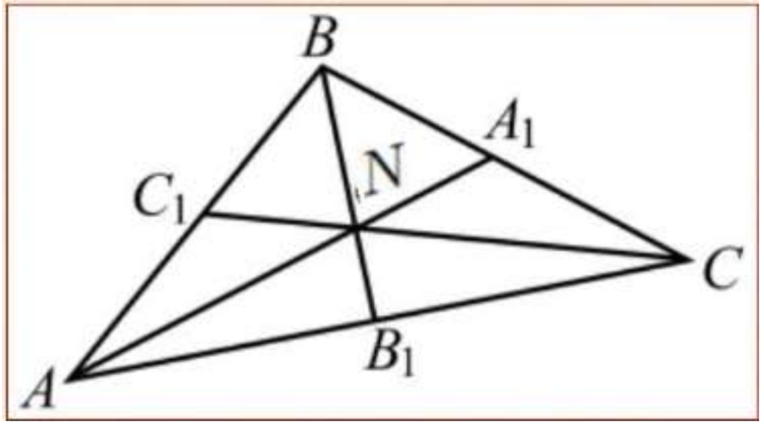


12

Стороны треугольника равны 2, 3 и 4. Найдите радиус окружности, проходящей через концы большей и середину меньшей стороны.

Ответ: $\dfrac{4\sqrt{46}}{3\sqrt{15}}$.

(СтатГрад, 2015) Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке N. Известно, что $AC = 3NB$.
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC = 10$.



а) Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины.
Значит, $BB_1 = \frac{3}{2}BN = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}AC = \frac{1}{2}AC$. Поэтому треугольники AB_1B и CB_1B равнобедренные, причём $\angle B_1AB = \angle ABB_1$ и $\angle B_1CB = \angle CBB_1$. Сумма всех этих четырёх углов равна 180°. Значит, $\angle ABC = \angle ABB_1 + \angle CBB_1 = 90°$. Отсюда следует, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Треугольник A_1BA прямоугольный. Поэтому

$$AA_1^2 = A_1B^2 + BA^2 = \frac{1}{4}CB^2 + BA^2.$$

Аналогично из прямоугольного треугольника C_1BC находим

$$CC_1^2 = C_1B^2 + BC^2 = \frac{1}{4}AB^2 + BC^2.$$

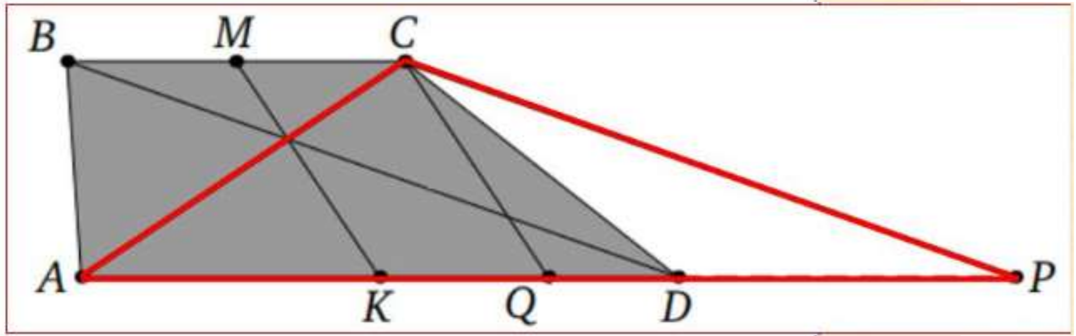
Складывая полученные равенства, имеем

$$AA_1^2 + CC_1^2 = \frac{5}{4}BA^2 + \frac{5}{4}BC^2 = \frac{5}{4}(BA^2 + BC^2) = \frac{5}{4}AC^2 = 125.$$

Ответ: 125.

Опорная задача

Диагонали трапеции равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найдите площадь трапеции.



Пусть M и K – середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$, $AC = 3$, $BD = 5$. Через вершину C меньшего основания BC проведём прямую, параллельную диагонали BD, до пересечения с прямой AD в точке P и прямую, параллельную MK, до пересечения с прямой AD в точке Q. Тогда

$$AQ = AK + KQ = AK + MC = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AD + DP) = \frac{1}{2}AP.$$

поэтому CQ – медиана треугольника ACP.

Четырехугольник $DBCP$ – параллелограмм (его противоположные стороны параллельны), поэтому равны площади $S_{CDP} = S_{BCD}$. А так как $S_{BCD} = S_{ABC}$, то $S_{ABCD} = S_{ACP}$.

В треугольнике ACP из формулы $CQ = \frac{1}{2}\sqrt{2AC^2 + 2CP^2 - AP^2}$ получаем $AP = 2\sqrt{13}$. Тогда полупериметр треугольника ACP равен $4 + \sqrt{13}$. По формуле Герона находим $S_{ACP} = \sqrt{(4+\sqrt{13})(4-\sqrt{13})(\sqrt{13}+1)(\sqrt{13}-1)} = 6$.

Ответ: 6.

Свойства высоты.

Теоремы. 1. Высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой *ортоцентром* треугольника.

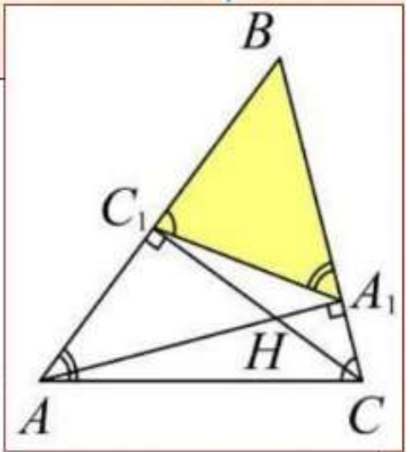
2. Если AA_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC, то $\triangle ABA_1 \sim \triangle CBC_1$; $\triangle BA_1C_1 \sim \triangle BAC$; $\angle BAC = \angle BA_1C_1$ и $\angle BCA = \angle BC_1A_1$.

Формула длины высоты. Высота треугольника, опущенная на сторону a, вычисляется по формуле $h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

$$h_a = \frac{2S_{ABC}}{a}.$$

25 **Опорная задача.**

Задача. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен β, AA_1 и CC_1 – высоты. Доказать, что треугольник BA_1C_1 подобен треугольнику ABC. Найти коэффициент подобия треугольников.



Решение. В прямоугольном ΔABA_1 имеем $\frac{BA_1}{AB} = \cos\beta$.

Аналогично в прямоугольном ΔC_1BC получим $\frac{BC_1}{BC} = \cos\beta$. Таким образом, у треугольников BA_1C_1 и ABC угол B – общий и отношение сторон, содержащих общий угол, равно $\frac{BA_1}{AB} = \frac{BC_1}{BC} = \cos\beta$. Значит треугольники подобны и коэффициент подобия равен $\cos\beta$.

Замечание. Если угол B тупой, то коэффициент подобия равен $-\cos\beta$.

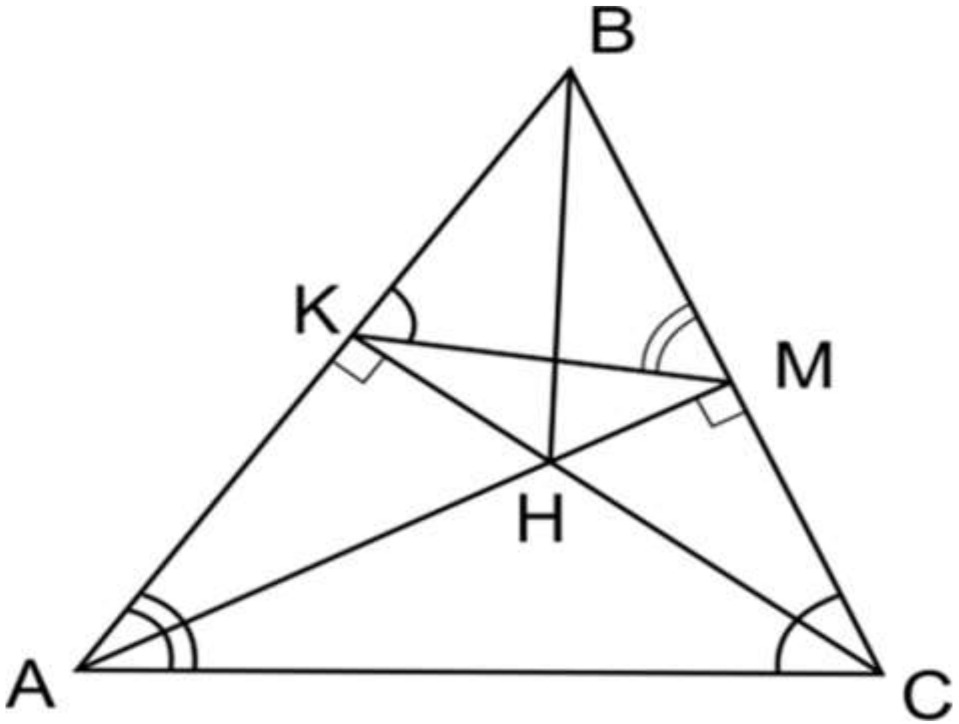
1. Треугольники МВК и $\triangle ABC$, подобны, причем коэффициент подобия $k=|\cos B|$

2. Четырехугольник АКМС можно вписать в окружность. Эта вспомогательная окружность поможет решить множество задач.

3. Четырехугольник КВМН также можно вписать в окружность.

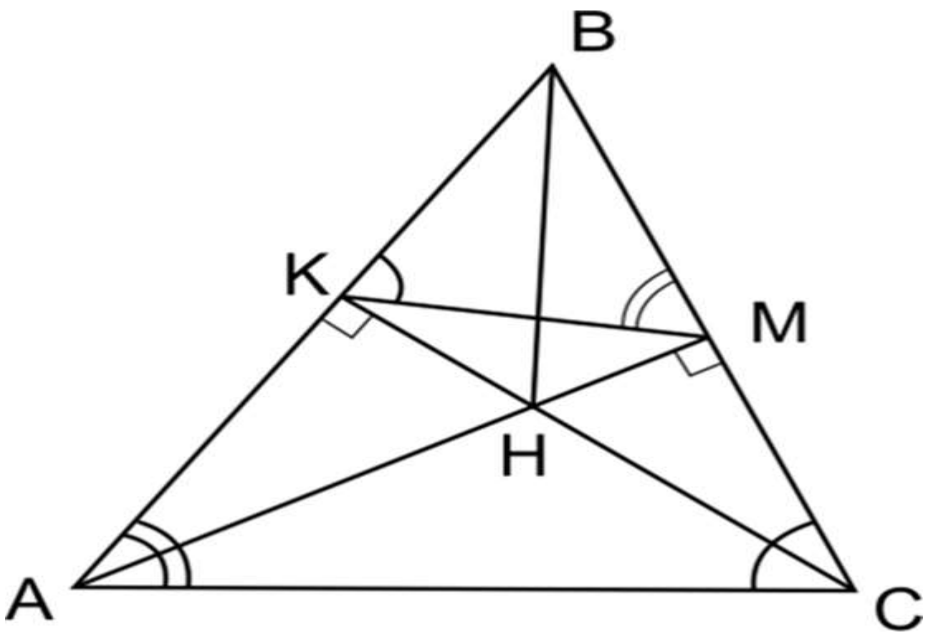
4. Радиусы окружностей, описанных вокруг треугольников АВС, АНС, ВНС и АВН, равны.

5. $BH=2R\,|\cos B|$, где R – радиус описанной окружности ΔABC.

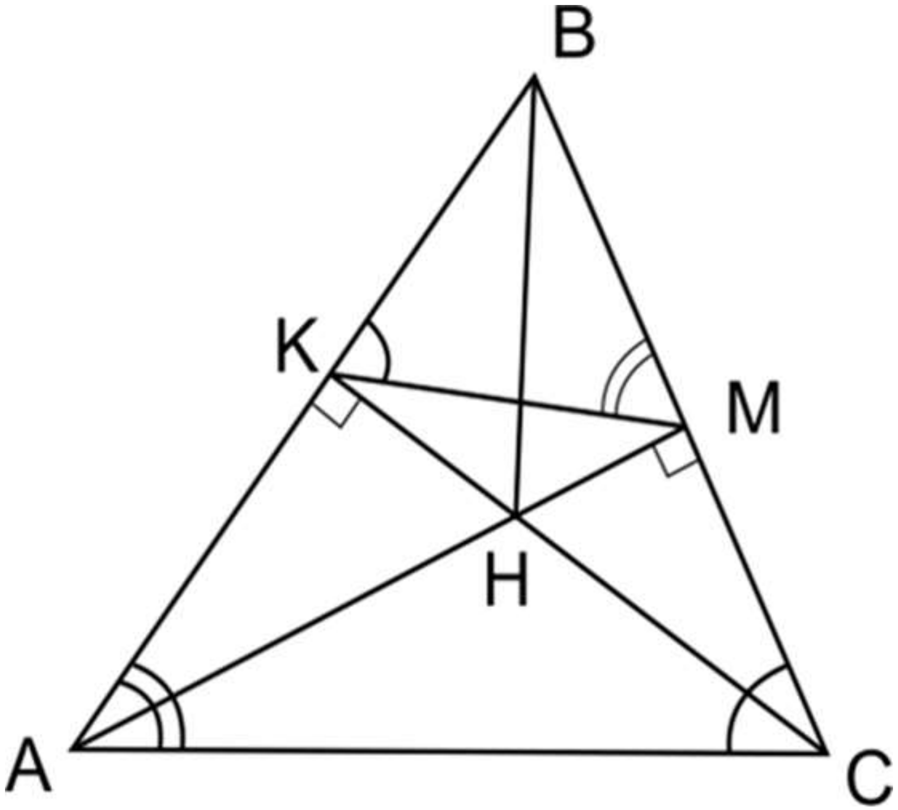


2) Докажем, что вокруг четырехугольника АКМС можно описать окружность. Для этого необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных углов четырехугольника АКМС были равны 180^0

Пусть ∠АСВ=∠ВКМ=γ (поскольку треугольники МВК и АВС подобны), тогда ∠АКМ= 180^0 -∠ВКМ= $180^0 -\gamma$ – как смежный с углом ВКМ. Получили, что ∠АКМ+ ∠АСМ= 180^0 , и это значит, что четырехугольник АКМС можно вписать в окружность.



3) Рассмотрим четырехугольник KBMH. Его противоположные углы BKH и BMH – прямые, их сумма равна 180^0, и значит, четырехугольник KBMH
можно вписать в окружность.



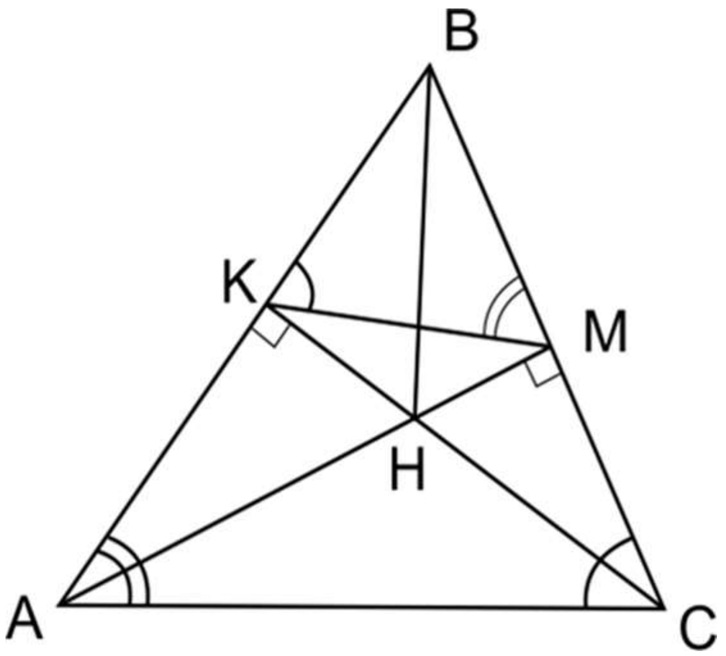
4) По теореме синусов, радиус окружности, описанной вокруг треугольника АВС, $R_{\Delta ABC} = \frac{AC}{2sinABC}$

Радиус окружности, описанной вокруг треугольника АНС,

$R_{\Delta AHC} = \frac{AC}{2sinAHC}$

Мы помним, что sin$(180^0 - \alpha)$=sinα

Значит, синусы углов АВС и АНС равны, и радиусы окружностей, описанных вокруг треугольников АВС и АНС равны.

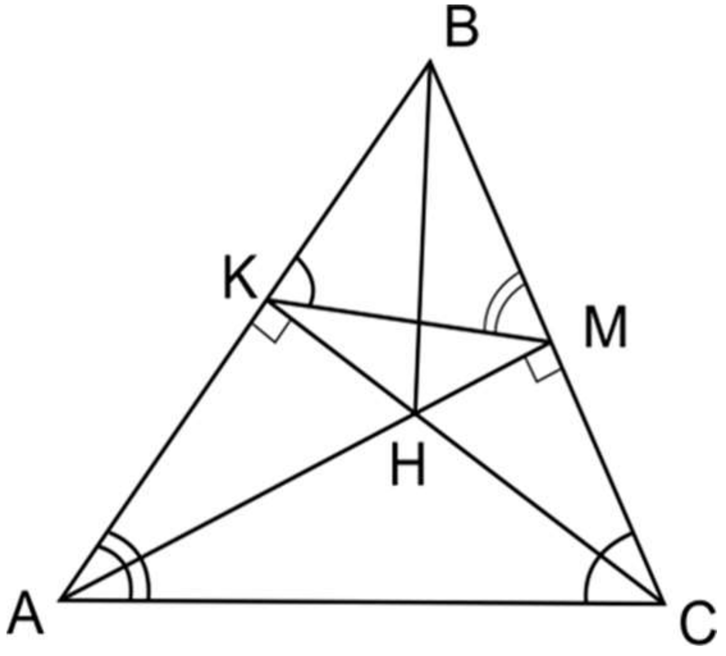


5) Докажем, что BH= $2R|cosB|$,где R – радиус описанной окружности ΔABC .

Поскольку четырехугольник KBMH можно вписать в окружность и углы BKH и BMH – прямые, отрезок BH является диаметром этой окружности. Треугольник MBK также вписан в эту окружность, и по теореме синусов, $BH = \frac{MK}{sinABC}$.

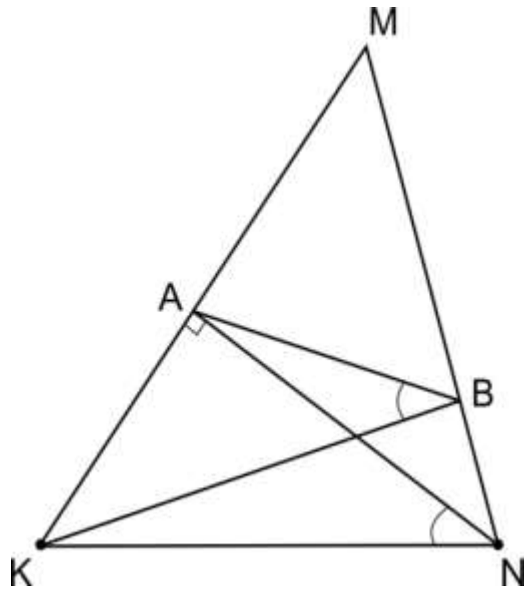
Диаметр окружности, описанной вокруг треугольника ABC, равен $d = \frac{AC}{sinABC}$

Поскольку треугольники MBK и ABC подобны, отношение диаметров описанных вокруг них окружностей равно $|cosB|$. Получили, что $BH = 2R|cosB|$



Задача ЕГЭ по теме «Высоты треугольника» (Профильный уровень

2. В остроугольном треугольнике KMN проведены высоты KB и NA.
а) Докажите, что угол ABK равен углу ANK.
б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABM, если известно, что KN=$8\sqrt{2}$ и угол KMN равен 45^0



а) Докажем, что $\angle ABK = \angle ANK.$
$\Delta MBK \sim \Delta MAN$ (по двум углам). Запишем отношение сходственных сторон:
$\frac{MA}{MB} = \frac{MN}{MK}$
Но это значит, что $\Delta ABM \sim \Delta NKM$ (по углу и двум сторонам), причем
$k = \frac{MA}{MN} = \cos KMN$.
$\angle MAB = \angle MNK, \angle BAK -$ смежный с углом $\angle MAB$,
$\angle BAK = 180° - \angle MAB = 180° - \angle BNK$
$\angle BAK + \angle BNK = 180°,$ четырехугольник ABNK можно вписать в окружность.
$\angle ABK = \angle ANK$ (опираются на одну дугу).

б) Найдем $R_{\Delta ABC}$,
если $KN = 8\sqrt{2}$ и угол $KMN = 45^0$

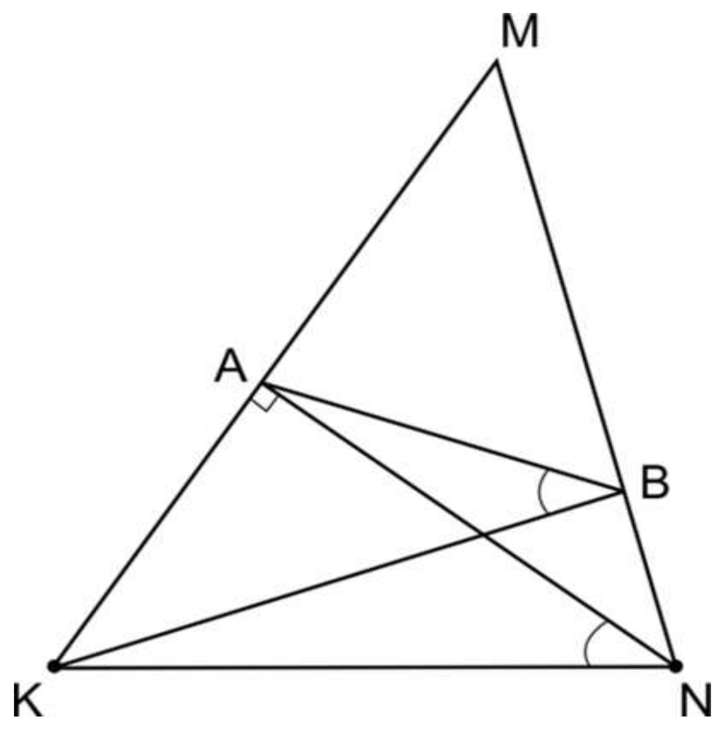
$\Delta ABM \sim \Delta NKM, \quad k = \cos KMN = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

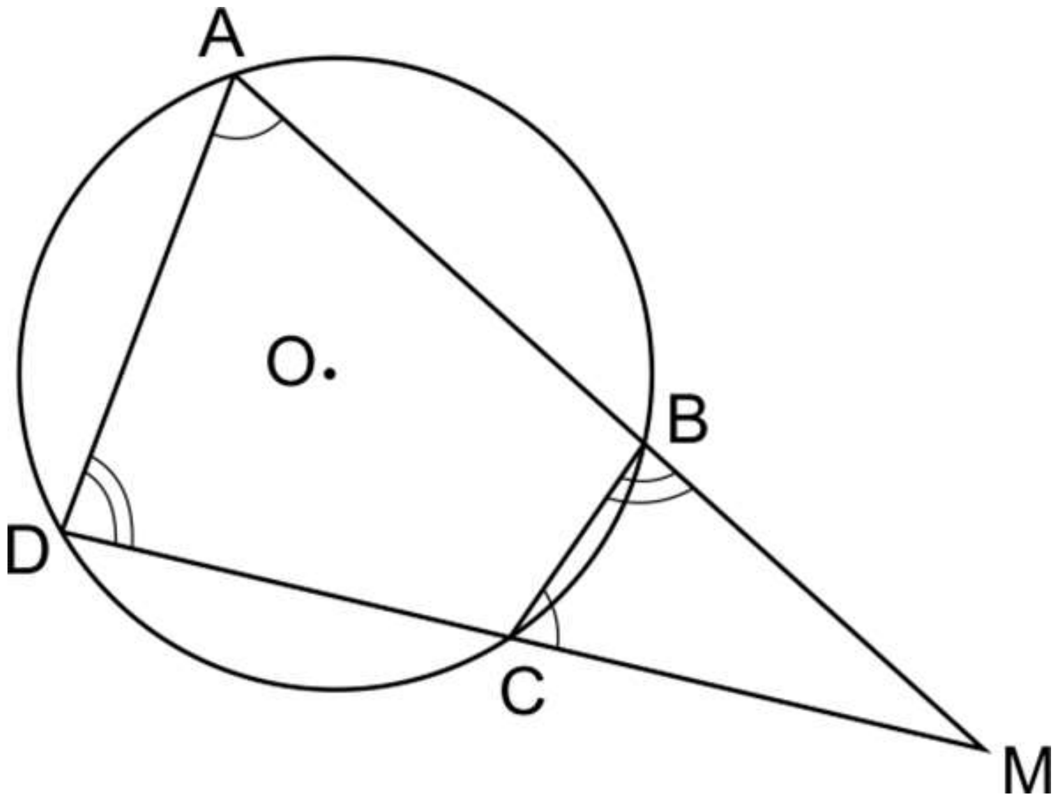
$$\frac{AB}{KN} = k,$$

$$\mathrm{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot KN = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 8$$

По теореме синусов,

$$R_{\Delta ABM} = \frac{AB}{2\sin AMB} = \frac{8 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

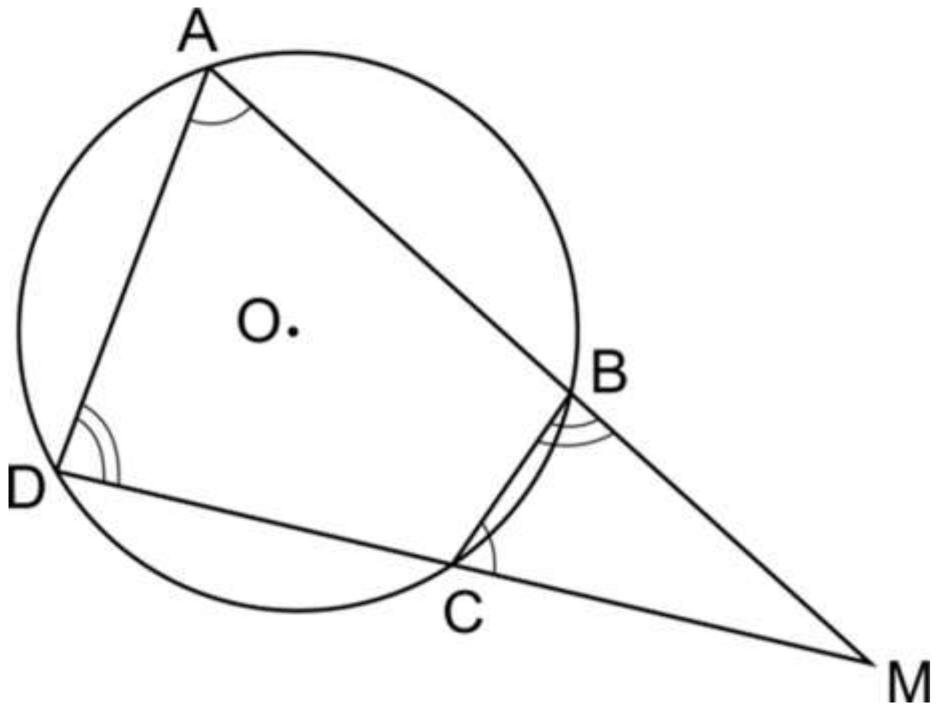




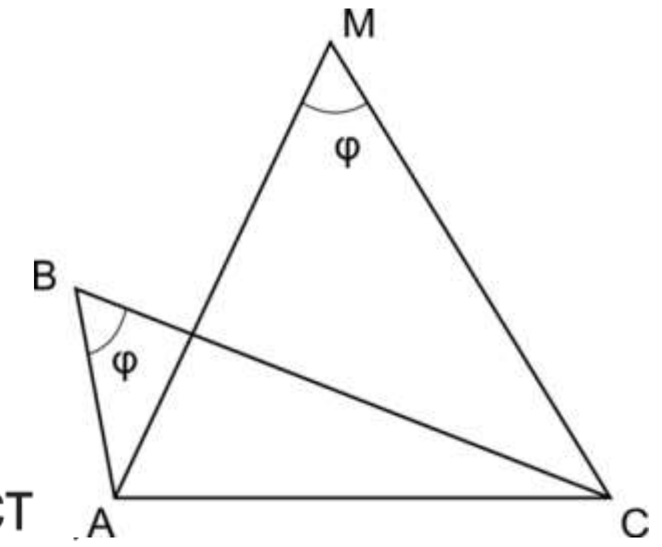
Задача 2.

Пусть луч MA пересекает окружность в точках A и B, а луч MD – в точках C и D, причем MA > MB, MD > MC. Тогда треугольники BMC и DMA подобны.

Пусть угол BAD равен α. Четырехугольник ABCD вписан в окружность, поэтому угол BCD равен 180° - α. Угол BCM – смежный с углом BCD, и значит, ∠BCM= ∠BAD = α, треугольники BMC и DMA подобны по двум углам.
Эта схема часто встречается в задачах ЕГЭ Профильного уровня. $\Delta BMC \sim \Delta DMA$



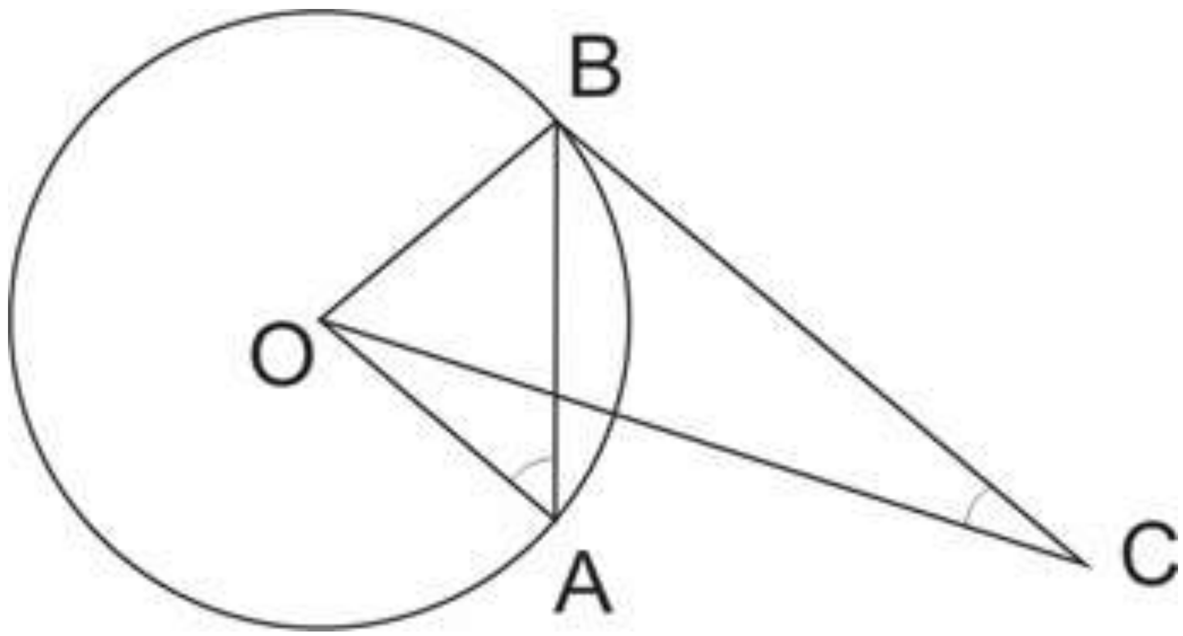
Задача 3. У треугольников АВС и АМС АС – общая сторона, угол В равен углу М, причем точки В и М лежат по одну сторону от прямой АС. Тогда точки А, В, С, М лежат на одной окружности.

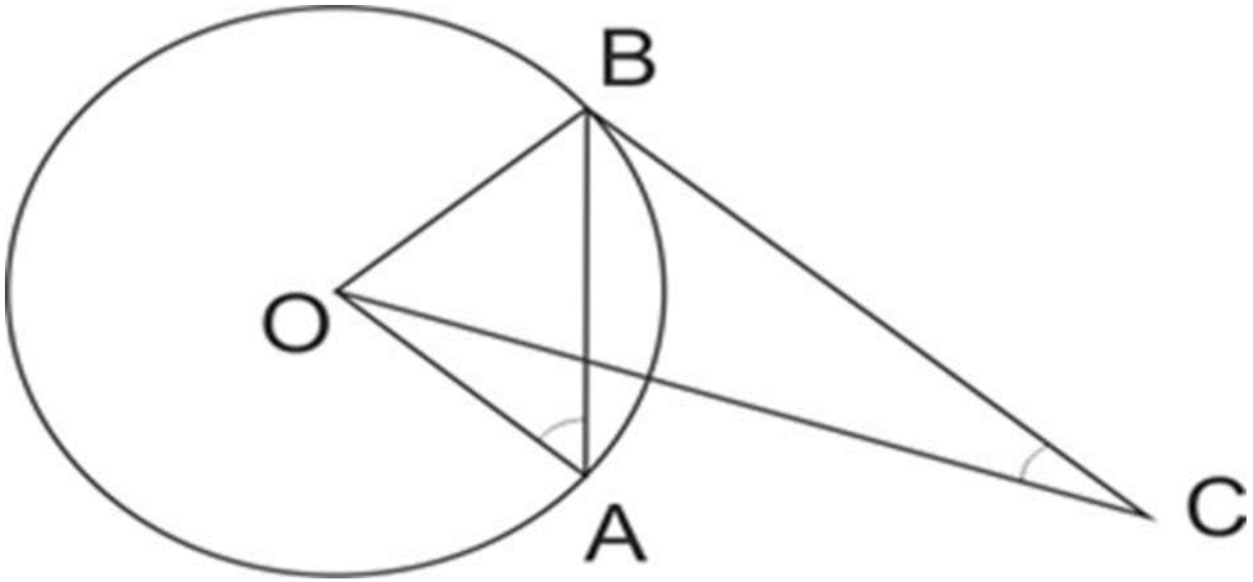


В самом деле:
по теореме синусов, радиус окружности,
описанной вокруг треугольника АВС, равен радиусу окружност
описанной вокруг треугольника АМС и равен $\frac{AC}{\sin\varphi}$

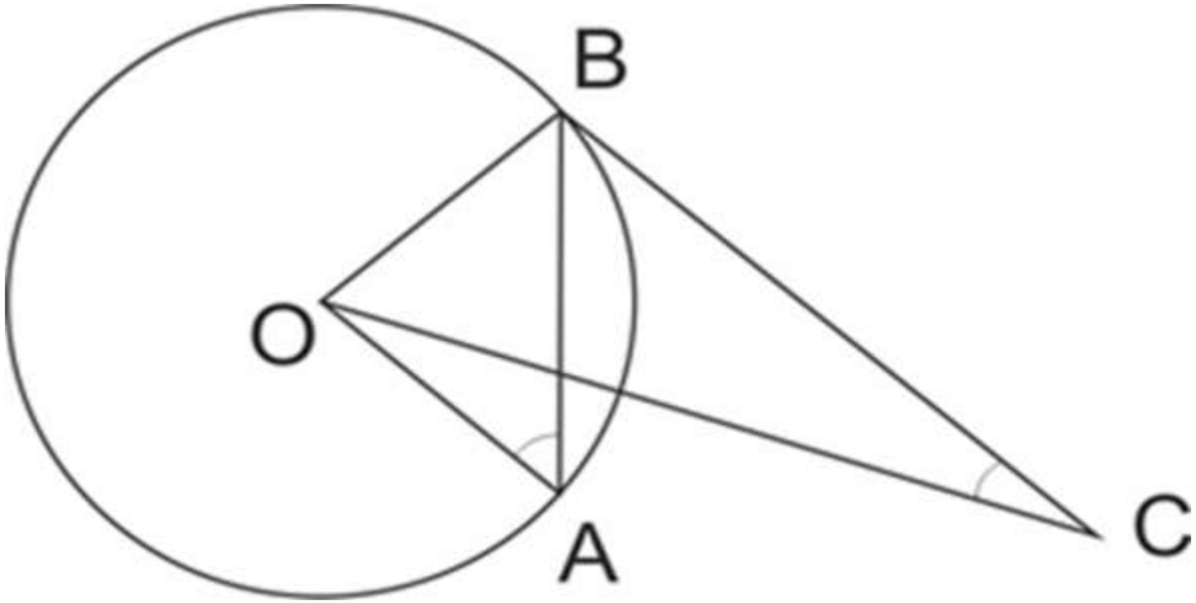
Задача ЕГЭ (Профильный уровень,

Пусть AB – хорда окружности с центром O,
CB – касательная к этой окружности, точки A и B лежат
по разные стороны от прямой OC.
Радиус окружности OB равен 4, $AB = 2\sqrt{11}$,
углы OCB и OAB равны.
а) Докажите, что точка O лежит на окружности Ω,
описанной вокруг треугольника ABC.
б) Найдите радиус окружности Ω.





а) По условию, углы OCB и OAB равны. Отрезок OB виден из точек A и C под одинаковыми углами. Это значит, что четырехугольник OACB можно вписать в окружность. Тогда точка O лежит на окружности Ω, описанной вокруг треугольника ABC.



б) Мы доказали, что точка O лежит на окружности Ω, описанной вокруг треугольника ABC.

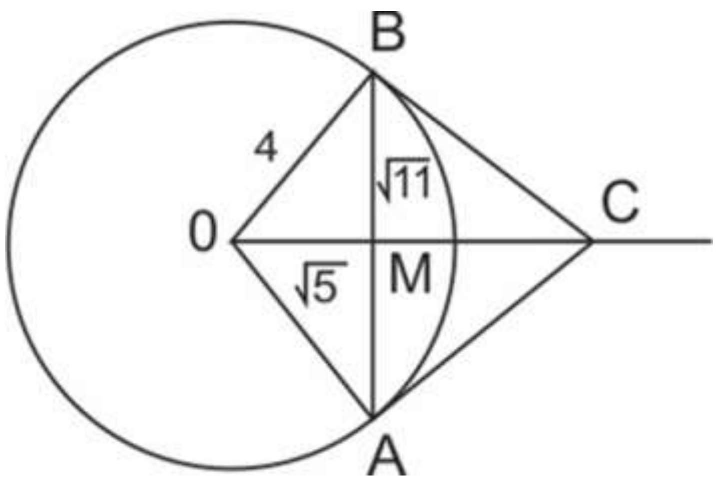
Так как BC – касательная к окружности, BC ⊥ OB, ∠OBC=90°,

значит, OC – диаметр. Тогда ∠OAC=90°,

и треугольники OBC и OAC равны по гипотенузе и катету:

OC – общая, OB=OA, ∠OAC=∠OBC=90°.

Радиус окружности Ω равен $\frac{1}{2}AC$



Перестроим чертеж. Пусть M – точка пересечения отрезков AB и OC.
По условию, OB = 4, AB=$2\sqrt{11}$. Тогда BM=$\sqrt{11}$

Из прямоугольного треугольника OBM по теореме Пифагора найдем OM=$\sqrt{5}$.

Заметим, что на чертеже есть подобные прямоугольные треугольники: $\Delta OMB \sim \Delta OBC$
по двум углам.
Запишем соотношение сходственных сторон для этих треугольников: $\frac{OM}{OB} = \frac{OB}{OC}$

Получим: $\frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{4}{OC}$

Отсюда $OC = \frac{16}{\sqrt{5}}$

Это диаметр окружности Ω. Радиус в 2 раза меньше: $R = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$

Важно знать (основные теоремы и формулы)

Углы, связанные с окружностью

1. Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается (рис. 1).
2. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается (рис. 1).
3. Угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой дуг, заключённых между прямыми, содержащими стороны угла (рис. 2).
4. Угол с вершиной вне круга и сторонами, пересекающими окружность или касающимися её, измеряется полуразностью дуг, заключённых внутри угла (рис. 3).
5. Угол между касательной к окружности и хордой, проведённой через точку касания, измеряется половиной дуги, заключённой внутри этого угла (рис. 4).

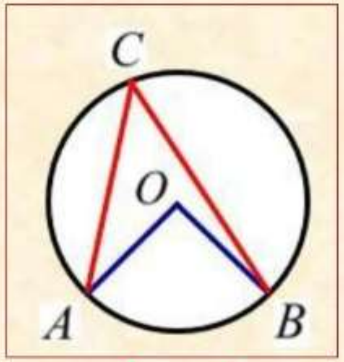


Рис. 1

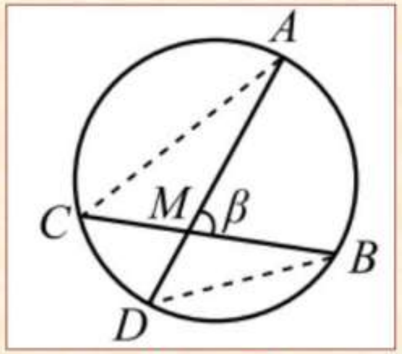


Рис. 2

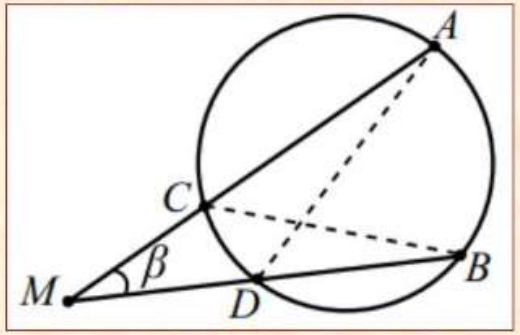


Рис. 3

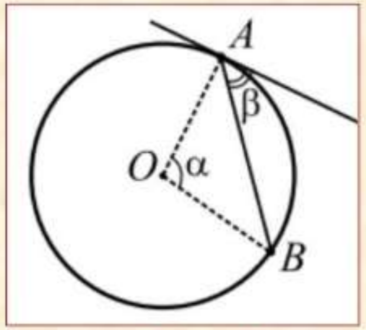


Рис. 4

Задачи для самостоятельного решения

29

(ЕГЭ, 2014) Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H.
а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.
б) Найдите BC, если $AH = 21$ и $\angle BAC = 30^\circ$.

Ответ: б) $7\sqrt{3}$.

30

(ЕГЭ, 2014) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H.

а) Докажите, что углы BB_1C_1 и BAH равны.

б) Найдите расстояние от центра O описанной окружности около треугольника ABC до BC, если $B_1C_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ и угол BAC равен 45°.

Ответ: б) 1,5.

31

(ЕГЭ, 2016) В треугольнике ABC проведены высоты AK и CM. На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.
а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны.
б) Найдите отношение $EH : AC$, если угол ABC равен 30°.

Ответ: б) $3:4$.

Задачи для самостоятельного решения

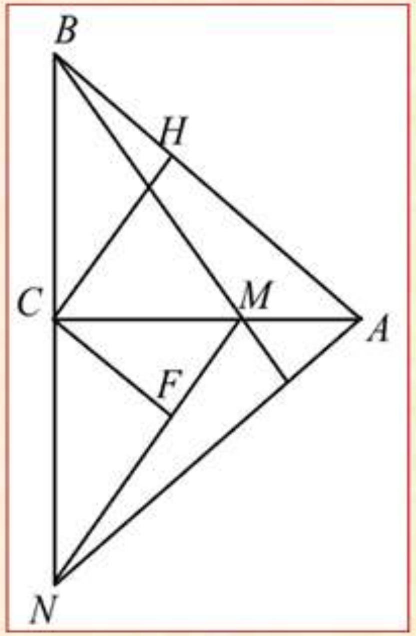
(ЕГЭ, 2020)

32 Дан прямоугольный треугольник ABC. На катете AC отмечена точка M, а на продолжении катета BC за точку C — точка N так, что $CM = CB$ и $CA = CN$.

а) Пусть CH и CF — высоты треугольников ABC и NMC соответственно. Докажите, что CF и CH перпендикулярны.

б) Пусть L — это точка пересечения BM и AN, $BC = 2$, $AC = 5$. Найдите ML.

Ответ: б) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.



(ЕГЭ, 2020)

РЕШУ ЕГЭ

33 На боковой стороне CD трапеции $ABCD$ отмечена точка M, которая является серединой этой стороны.

а) Докажите, что $S_{ABM} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

б) На стороне CD отмечена точка K, такая, что $S_{BKC} = \frac{1}{2} S_{AKD}$, причем $AD = 2BC$. Расстояние от точки D до прямой AB равно 10. Найдите расстояние от точки K до стороны AB.

Ответ: б) 7,5.

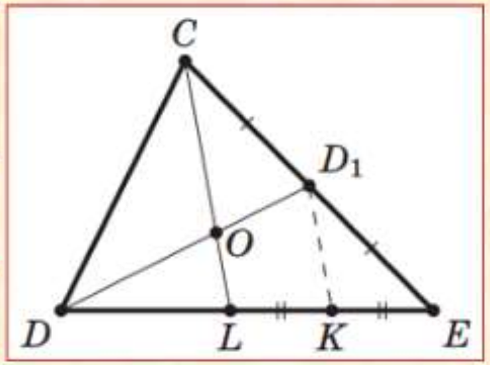
Важно знать (основные теоремы и формулы)

Теорема Фалеса. Если на одной стороне угла отложены равные отрезки и через их концы проведены параллельные прямые до пересечения с другой стороной угла, то и на ней отложатся равные между собой отрезки.

34 **Опорная задача**

На стороне DE треугольника DCE отмечена точка L так, что $DL:LE=5:6$. В каком отношении отрезок CL делит медиану DD_1 треугольника CDE?

Ответ: $\frac{5}{3}$.



Опорная задача

35 В треугольнике ABC из вершин A и B к сторонам BC и AC соответственно проведены отрезки AD и BE, делящие эти стороны в отношении $BD:DC=m:n$ и $AE:EC=p:q$. В каком отношении прямая AD делит отрезок BE?

Решение.

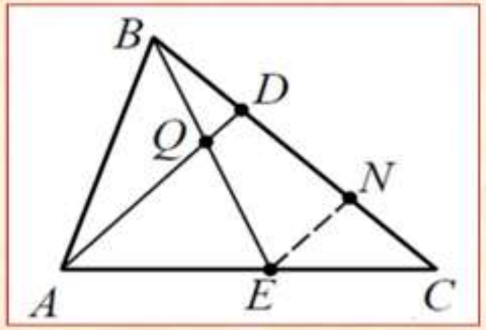
Проведем отрезок $EN \parallel AD$. $\frac{DN}{NC}=\frac{AE}{EC}=\frac{p}{q}$ и $NC=\frac{q}{p}DN$.

Откуда $DC=DN+NC=\frac{p+q}{p}DN$. $\frac{BD}{DC}=\frac{m}{n}$ и значит

$BD=\frac{m}{n}DC=\frac{m}{n}\cdot\frac{p+q}{p}DN$.

В треугольнике BNE $QD \parallel EN$ и $\frac{BQ}{QE}=\frac{BD}{DN}$.

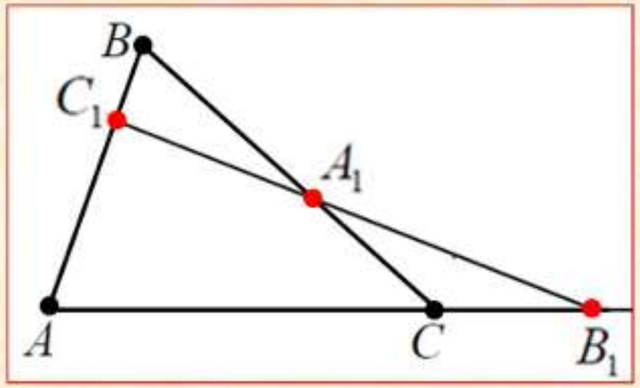
Ответ: $\frac{m}{n}\cdot\left(1+\frac{q}{p}\right)$.



Важно знать (основные теоремы и формулы)

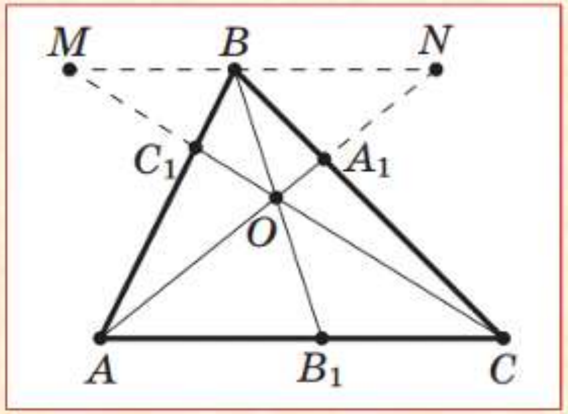
Теорема Менелая. Если в треугольнике ABC на сторонах BC, AC и AB (или их продолжениях) выбраны точки $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$, не совпадающие с вершинами треугольника, то точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство:

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1.$$



Теорема Чевы. Если на сторонах треугольника ABC взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1 и отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке внутри треугольника, то

$$\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = 1.$$



Задачи для самостоятельного решения

36 В треугольнике ABC, площадь которого равна 6, на стороне AB взята точка K, делящая эту сторону в отношении $AK : BK = 2 : 3$, а на стороне AC взята точка L, делящая AC в отношении $AL : LC = 5 : 3$. Точка Q пересечения прямых CK и BL отстоит от прямой AB на расстояние 1,5. Найдите сторону AB.

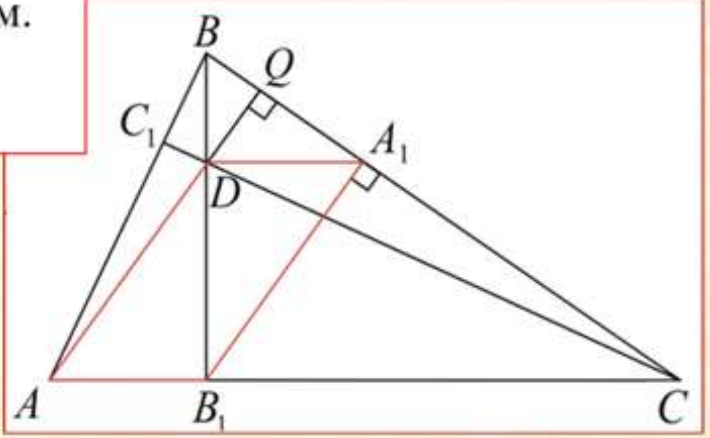
Ответ: 4.

37 **(ЕГЭ, 2020)**

На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно, причём $AC_1 : C_1B = 8 : 3$, $BA_1 : A_1C = 1 : 2$, $CB_1 : B_1A = 3 : 1$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D.

а) Докажите, что ADA_1B_1 — параллелограмм.

б) Найдите CD, если отрезки AD и BC перпендикулярны, $AC = 28$, $BC = 18$.



Ответ: б) 17.

Задачи для самостоятельного решения

38 (ЕГЭ, 2016)

Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB треугольника ABC, причём $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O.

а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC.

б) Найдите отношение площади четырёхугольника AB_1OC_1 к площади треугольника ABC, если известно, что $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 4$.

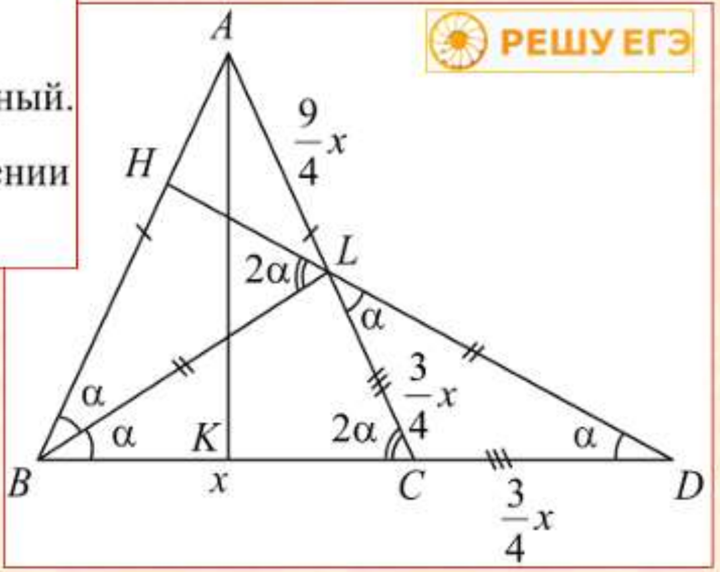
Ответ: б) 1:15.

39 (ЕГЭ, 2016)

На отрезке BD взята точка C. Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD.

а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.

б) Известно, что $\cos\angle ABC = \frac{1}{6}$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB?



Ответ: б) 9:7 (или 7:9).

Спасибо за внимание!

ЦНППМ