Стереометрия на ЕГЭ
Задача №14

24 сентября 2025г.

Спикер: Попова Марина Александровна

ТИПЫ ЗАДАЧ:

1. Угол между прямыми.

2. Угол между прямой и плоскостью

3. Угол между двумя плоскостями

4. Расстояние от точки до прямой

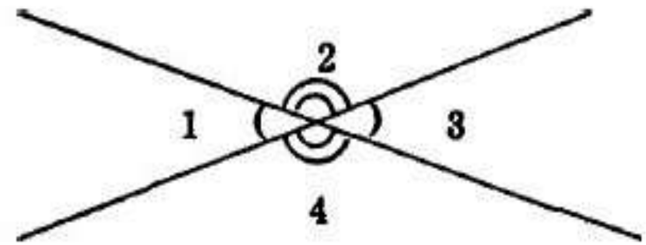
5. Расстояние от точки до плоскости

6. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Угол между прямыми

<u>1.Определение:</u> Две пересекающиеся прямые образуют смежные и вертикальные углы.

<u>Углом между двумя прямыми</u> называется меньший из них. Угол между перпендикулярными прямыми равен 90°. Угол между параллельными прямыми равен 0°.



Смежные :

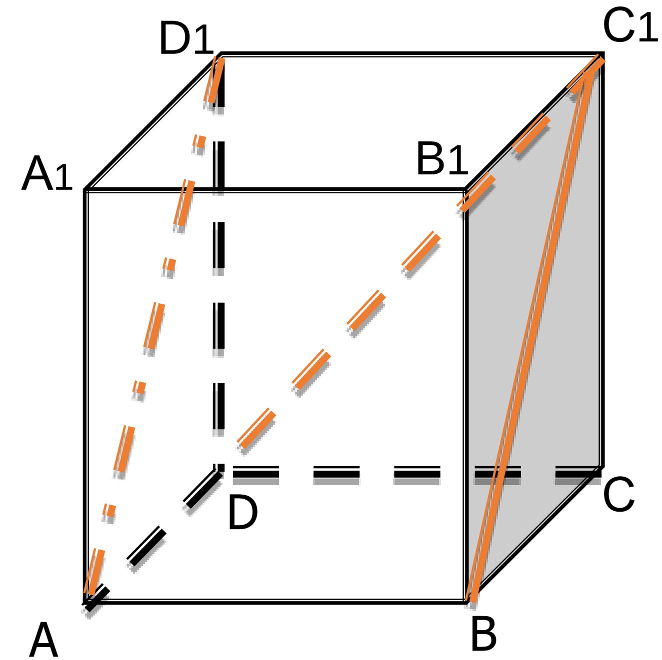
$\angle 1 \textit{и} \angle 2, \angle 3 \textit{и} \angle 4;$

Вертикальные :

$\angle 1 \textit{и} \angle 3, \angle 2 \textit{и} \angle 4$

2.Скрещивающиеся прямые

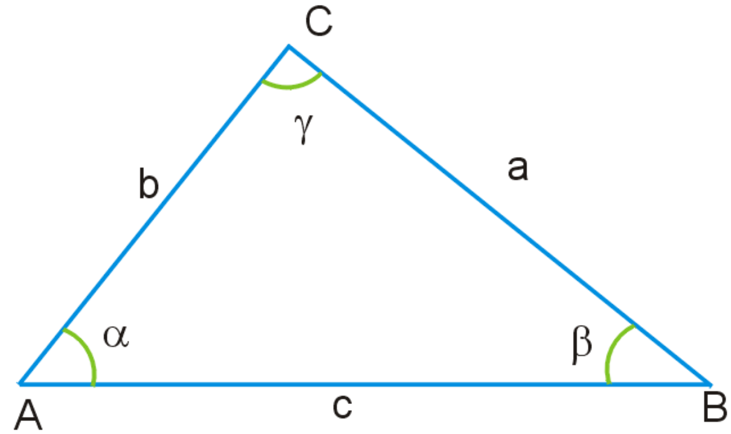
Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, которые параллельны данным скрещивающимся прямым.



В кубе A…C1 прямые AD1 и DC1 –скрещивающиеся (т.к. лежат в разных плоскостях и не пересекаются). Пользуясь определением угла между скрещивающимися прямыми, получаем: AD1 II BC1 => заменим одну прямую другой. ∠DC1B – искомый.

Для решения задач по стереометрии №14, практически всегда приходиться применять формулы и теоремы.

1)<u>Теорема косинусов: </u>Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.



$$\boxed{a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot \cos\alpha}$$

2)<u>При решении векторным способом</u>: скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними.

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{в}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{в}\right|\cdot\cos\alpha,\text{где}\,\alpha-\text{искомый}}$$

$$\text{угол};\vec{a}(x_1;y_1;z_1),\vec{в}(x_2;y_2;z_2)\Rightarrow$$

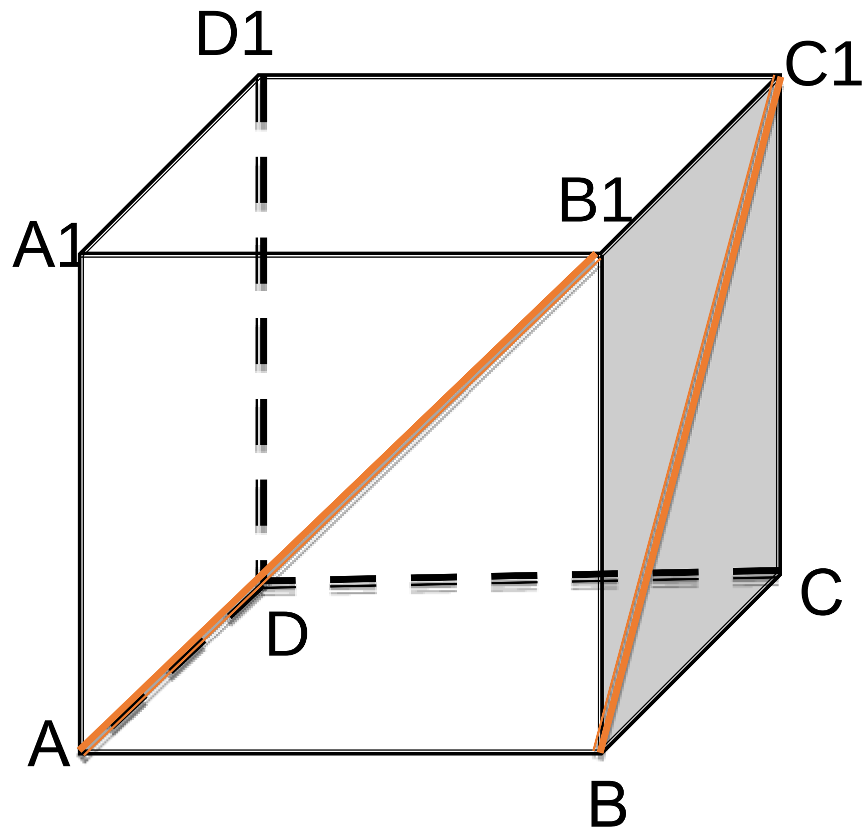
$$\vec{a}\cdot\vec{в}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2;$$

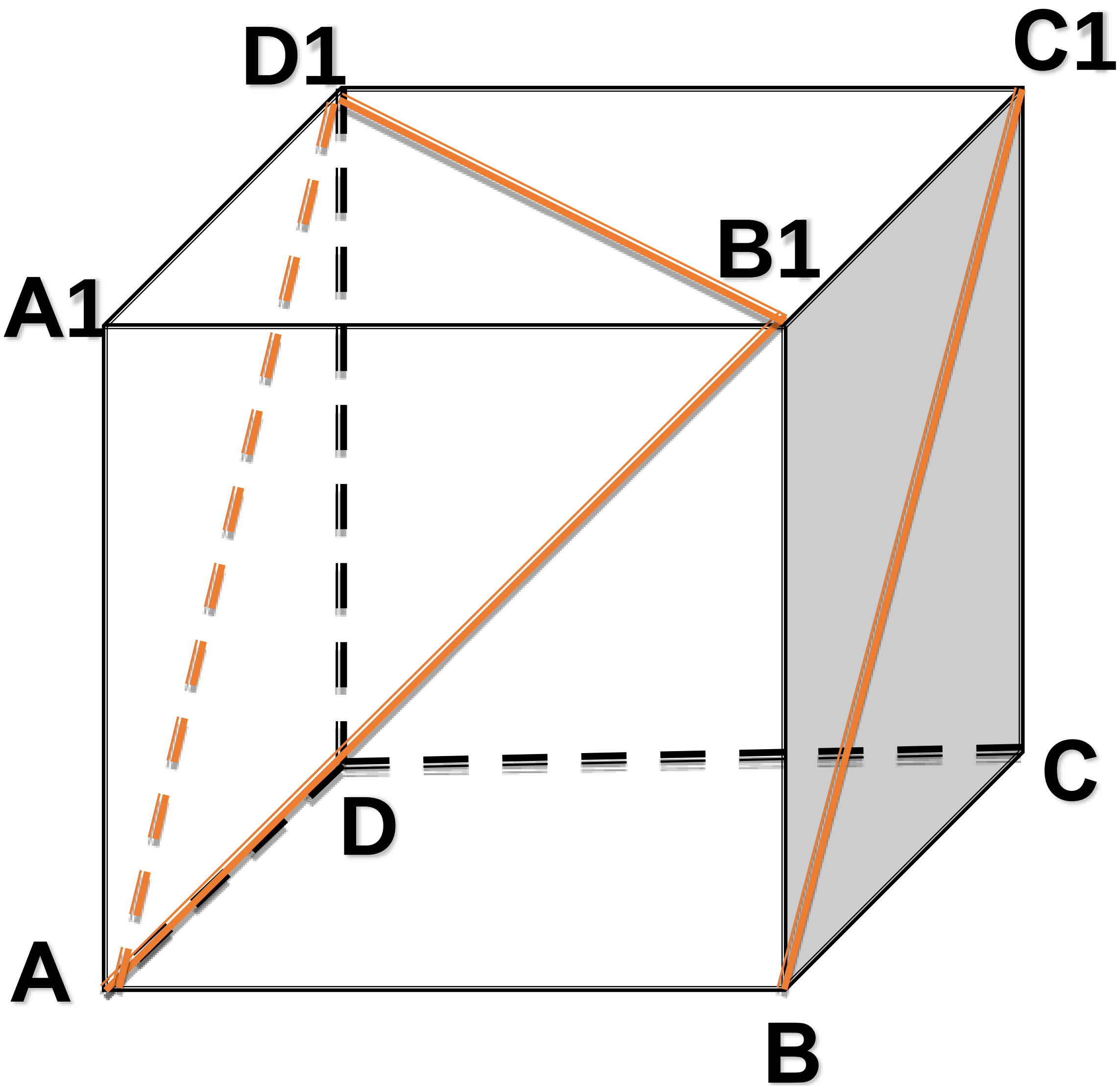
$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2};$$

$$\left|\vec{в}\right|=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}.$$

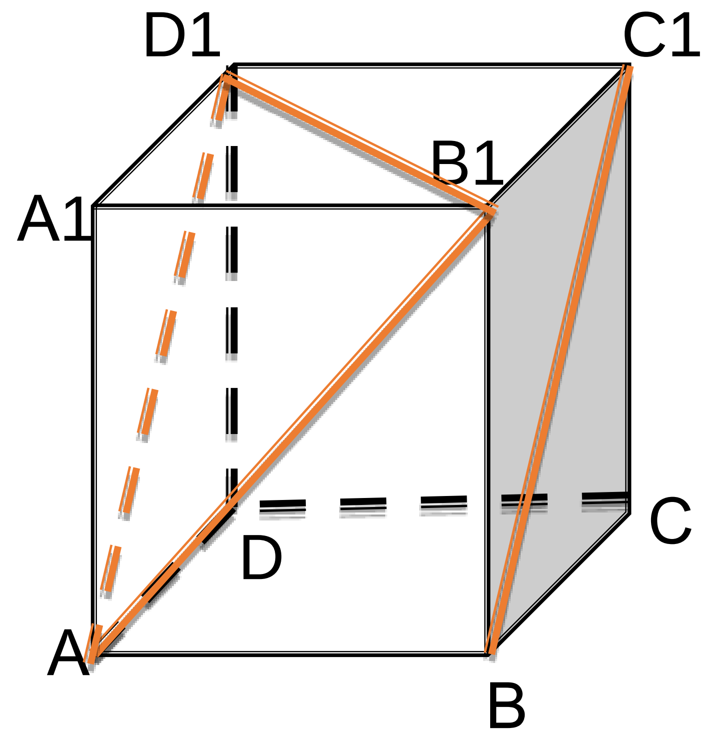
Ключевая задача

В единичном кубе A…D1 найдите угол между прямыми AB1 и BC1 .



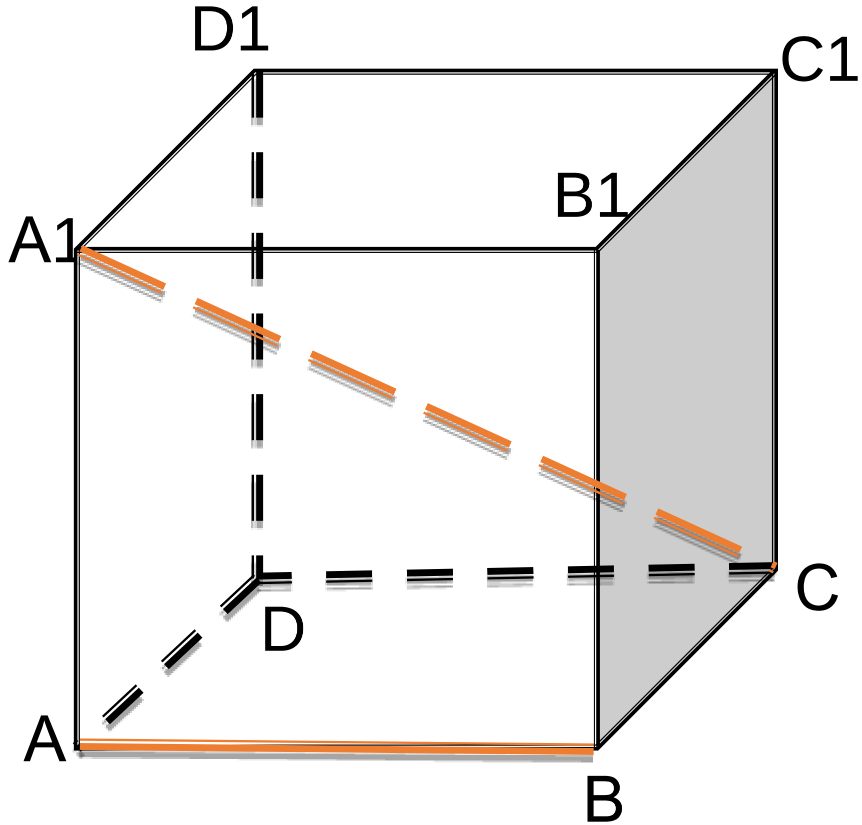

D1
C1
B1
A1
C
D
A
B

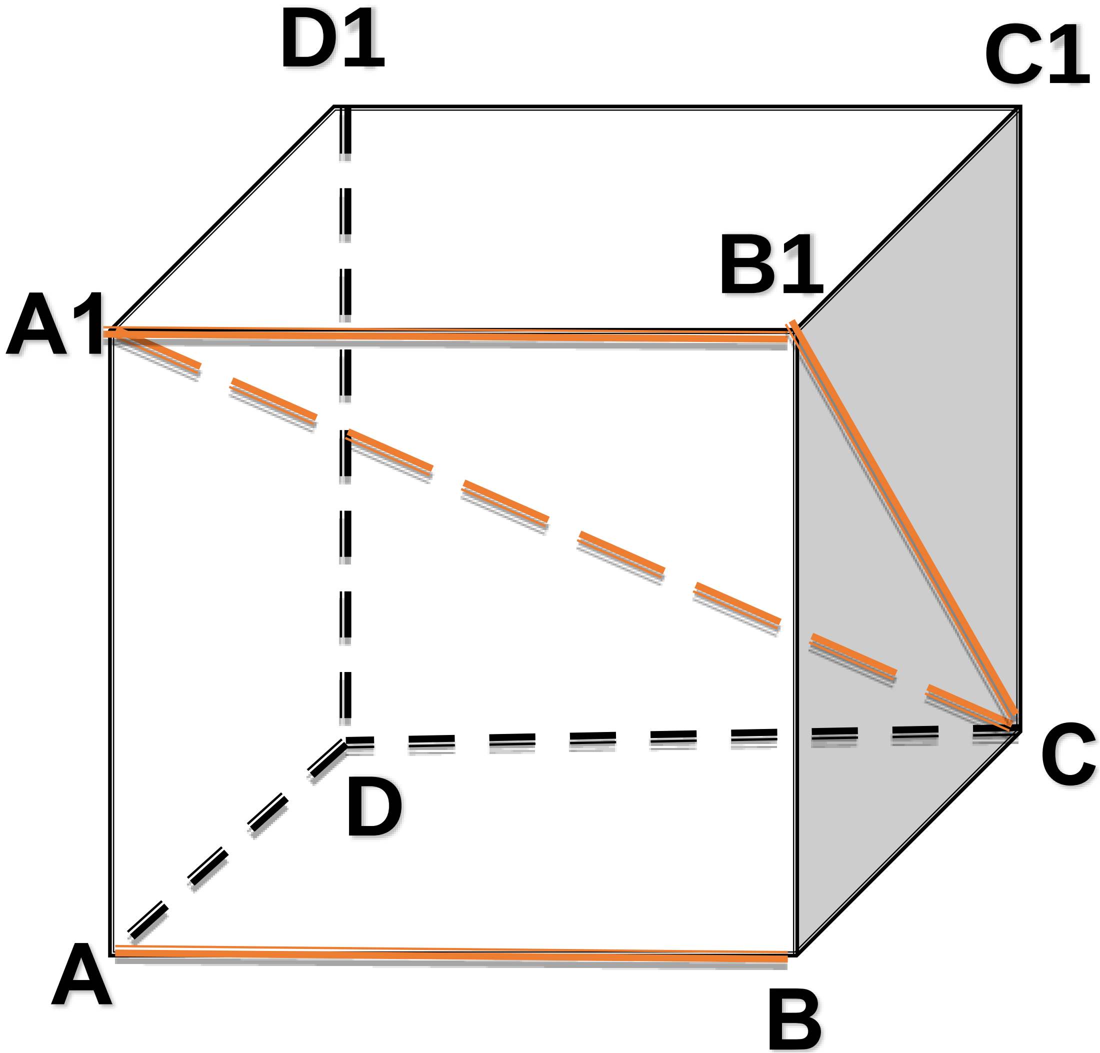
1.Прямые AB1 и BC1 - скрещивающиеся. Прямая AD1ll BC1
2. Заменим прямую BC1 прямой AD1
3.Следовательно искомый∠D1AB1
4.Рассмотрим ∆ D1AB1 - равносторонний. Так как AD1=D1B1=B1A (куб единичный, данные стороны являются диагоналями соответствующих квадратов). Исходя из этого, по свойству углов в равностороннем треугольнике (все углы равны).
5.Искомый∠D1AB1=60°
Ответ: 60°

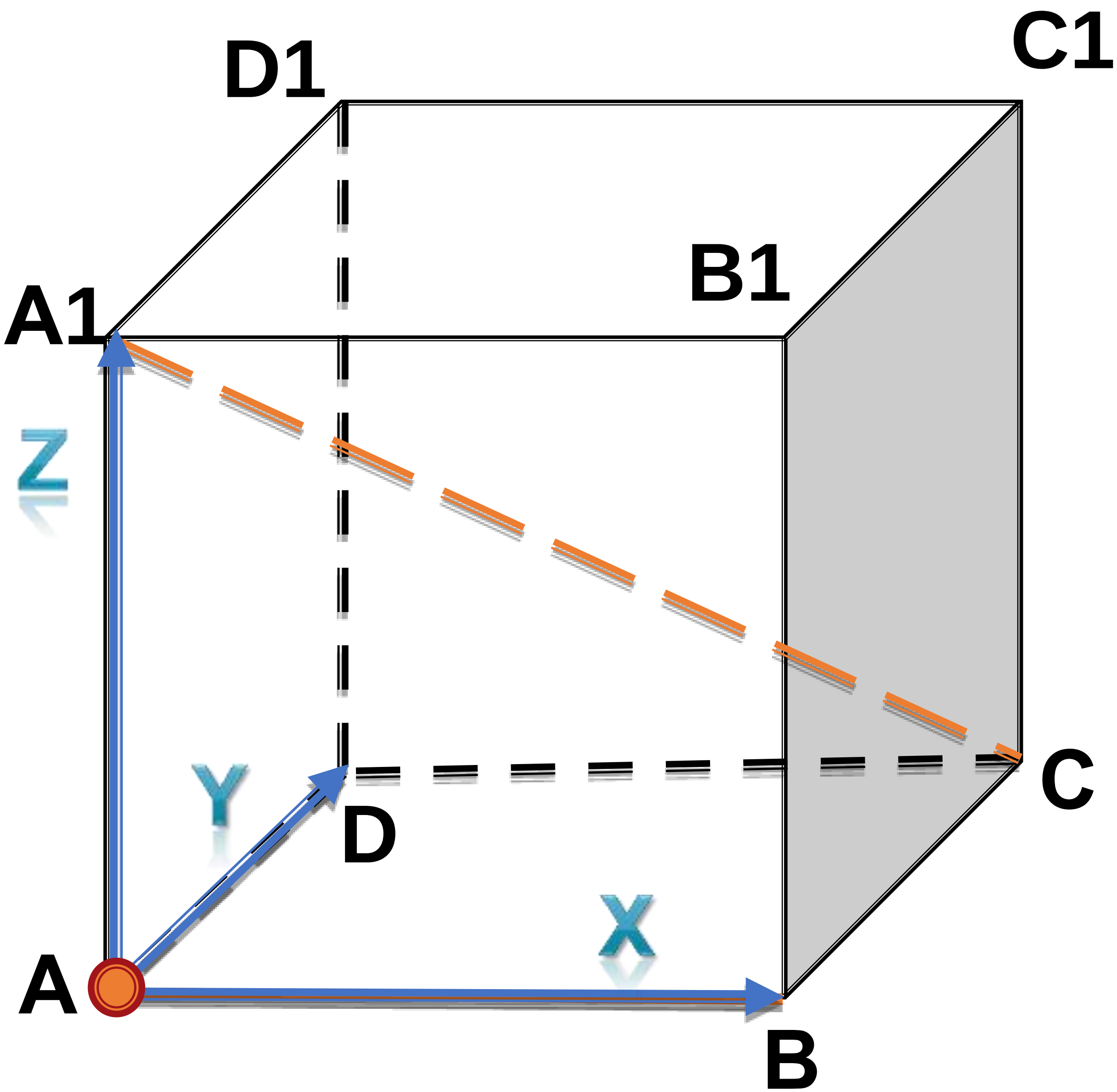


Тренировочное задание

В кубе A…D1 найдите косинус угла между прямыми AB и CA1.




D1
C1
B1
A1
C
D
A
B

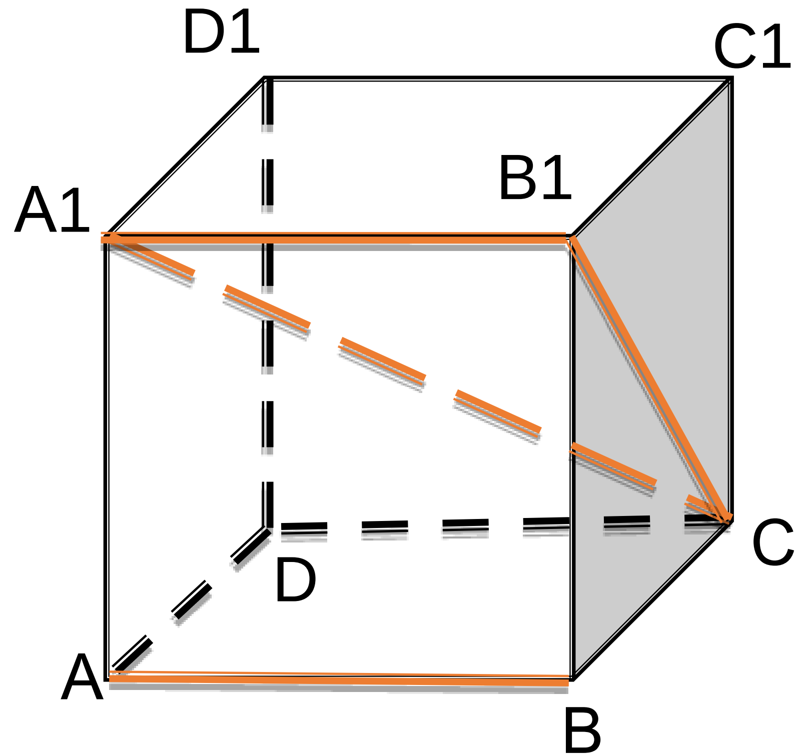


D1
C1
B1
A1
Z
Y
D
C
X
A
B

1 СПОСОБ

1. AB и A_1C скрещивающиеся.
2. AB II A_1B_1 => искомый угол B_1A_1C
3. В ΔA_1B_1C, так как $\angle A_1B_1C=90°$ (т.к. $A_1B_1 \perp (BB_1C_1C)$, а значит по определению и любой прямой лежащей в этой плоскости $A_1B_1 \perp B_1C$)
4. По определению косинуса: $\cos \angle B_1A_1C = \frac{A_1B_1}{A_1C}$
5. $A_1B_1 = 1$
6. $A_1C^2=1^2+(\sqrt{2})^2=3$, $\Rightarrow A_1C=\sqrt{3}$
7. $\cos\angle B_1A_1C=1/\sqrt{3}=\sqrt{3}/3$

Ответ: $\sqrt{3}/3$



2 СПОСОБ

1. Введем систему координат с началом в точке A и осями AB(Ox); AD(Oy); AA_1(Oz);

2. Рассмотрим в данной системе координат векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1C}$

3. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ (1;0;0)

4. A_1 (0;0;1); C (1;1;0) =>$\overrightarrow{A_1C}$ (1;1;-1)

5. Пусть α угол между AB и A_1C, тогда $\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{A_1C}|}$

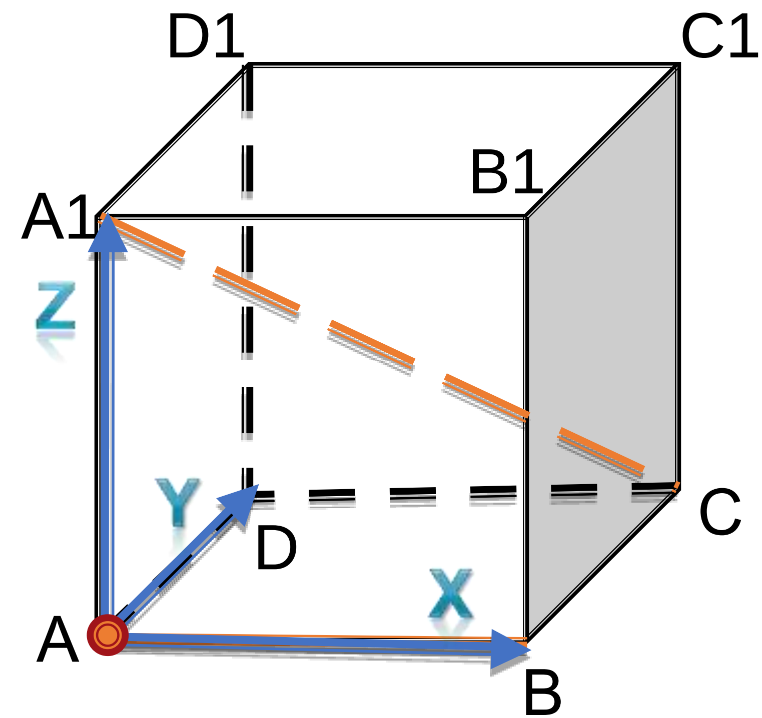
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A_1C}=1+0+0=1$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+0^2+0^2}=1$

$|A_1C|=\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$

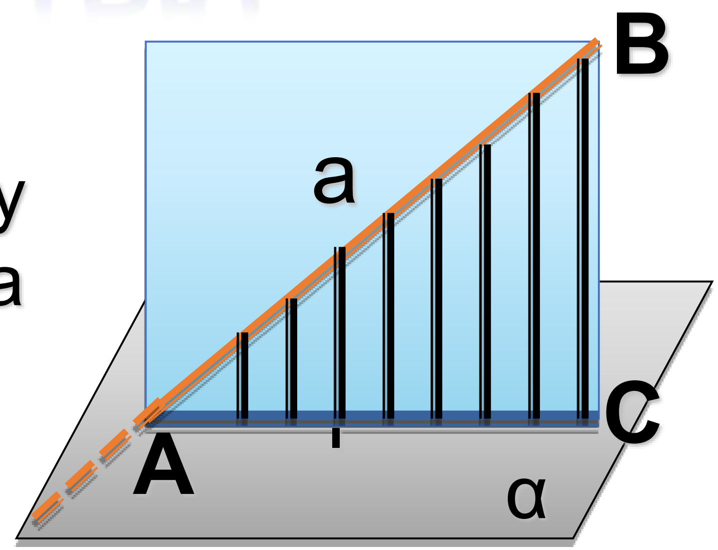
6. cosα=1/(1·√3)=1/√3=√3/3

Ответ: √3/3



Угол между прямой и плоскостью

1. Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой называется угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость.
2. Угол между взаимно перпендикулярными прямой и плоскостью равен 90 .
3. Если прямая параллельна плоскости (или лежит в ней), то угол между ними считается равным 0 .



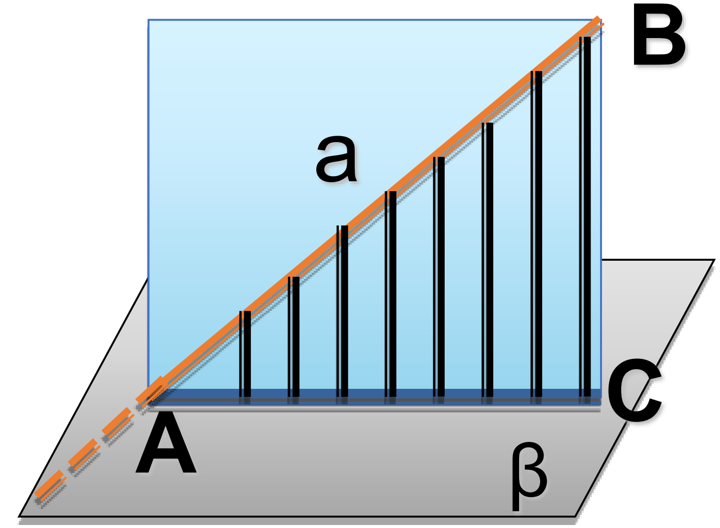
$a \cap \alpha = A$

$BC \perp \alpha$

$\angle$ BAC – искомый угол

Замечания:

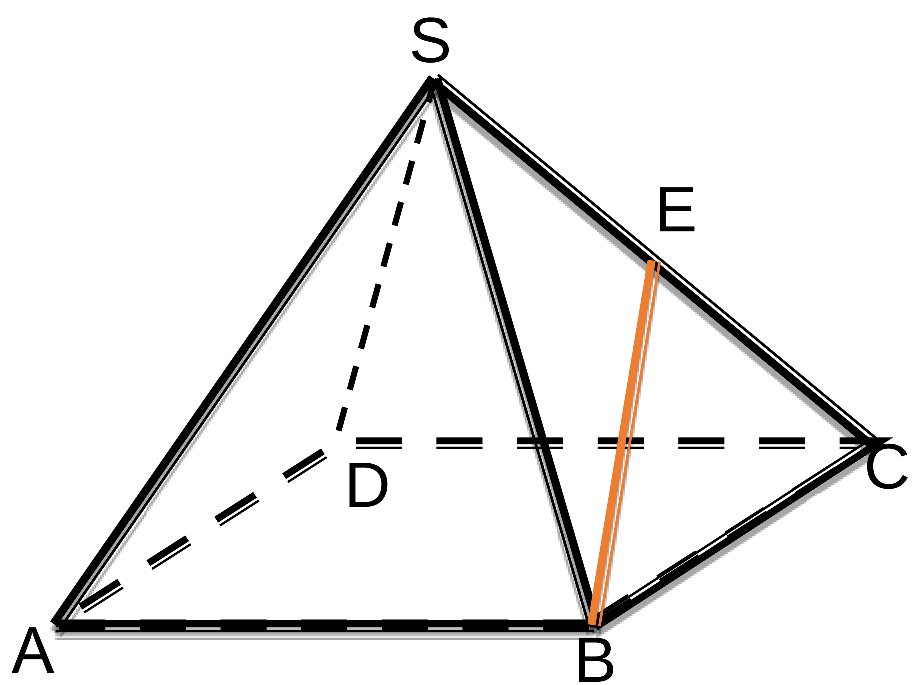
Если находить угол между данной прямой и перпендикуляром к данной плоскости, обозначив его α′, тогда искомый угол α равен (90°-α′)

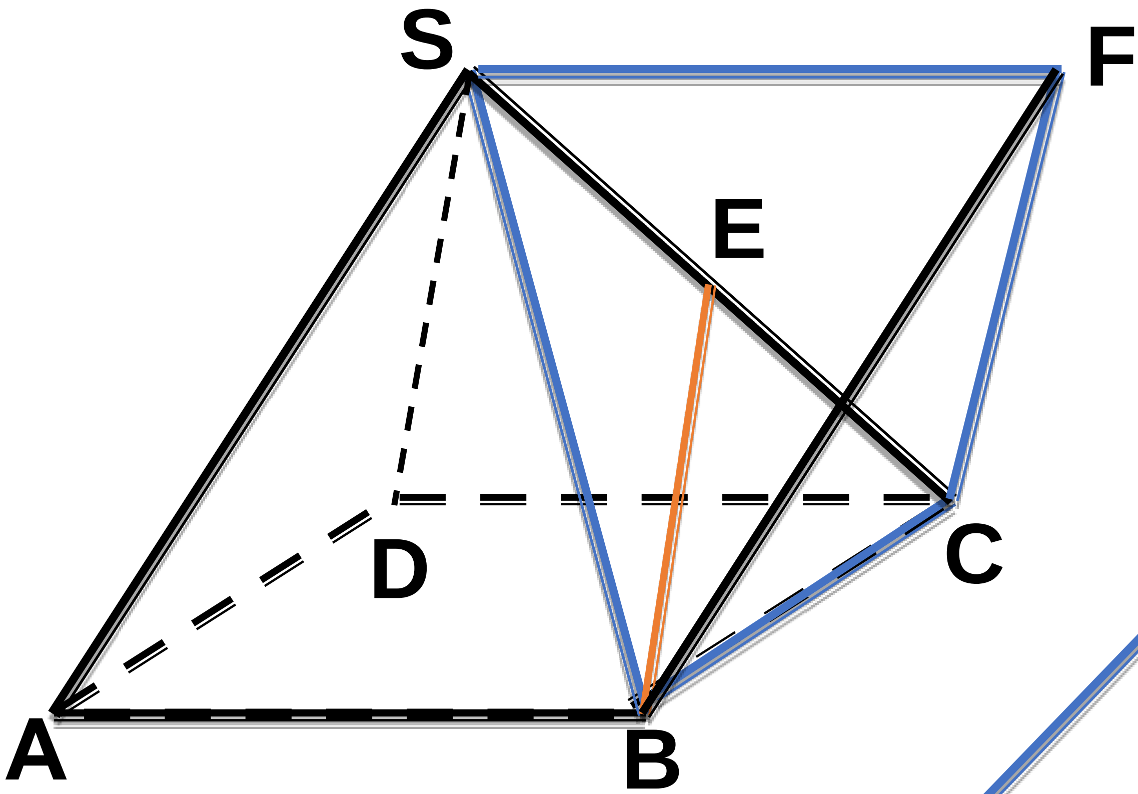


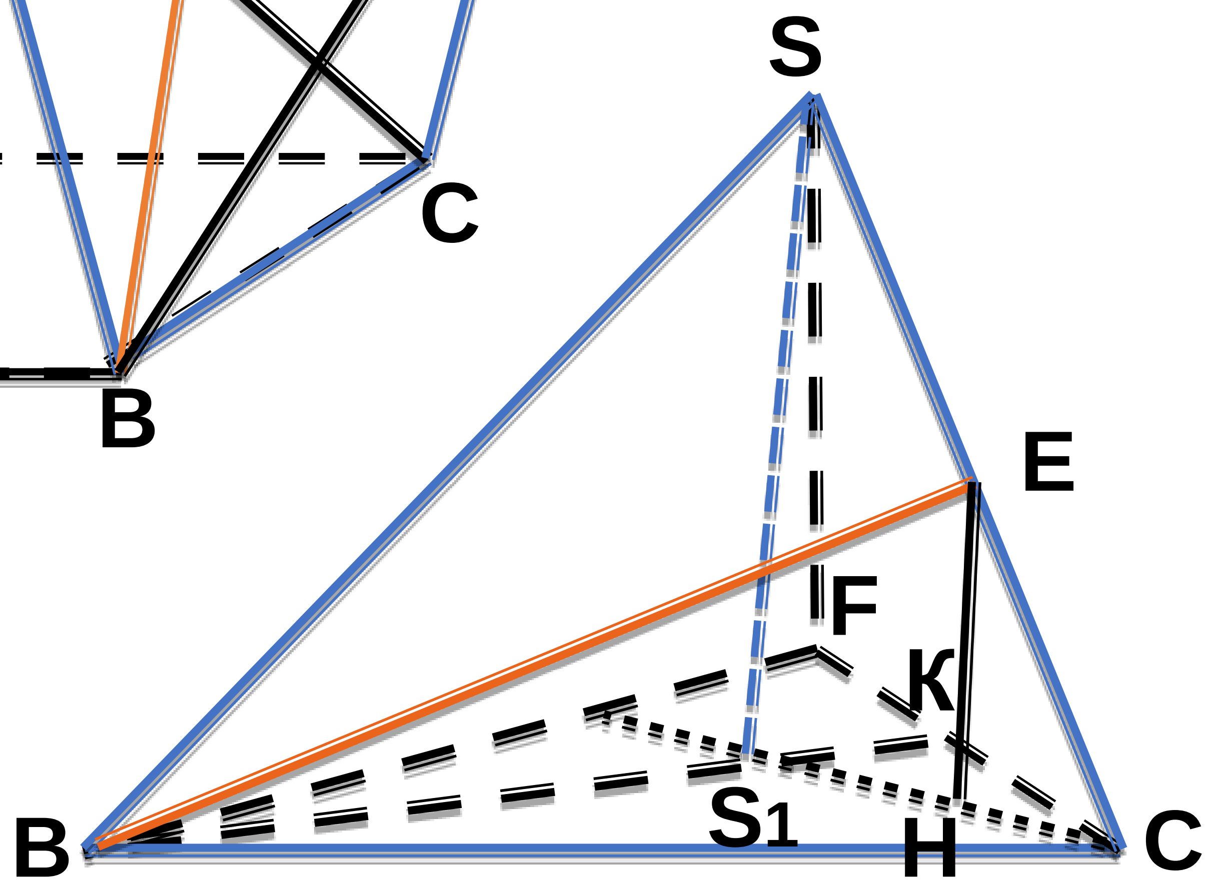
Находят ∠ ABC=α′, тогда искомый ∠ BAC=(90°-α′), т.к. ΔABC – прямоугольный; а сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна 90°

Ключевая задача

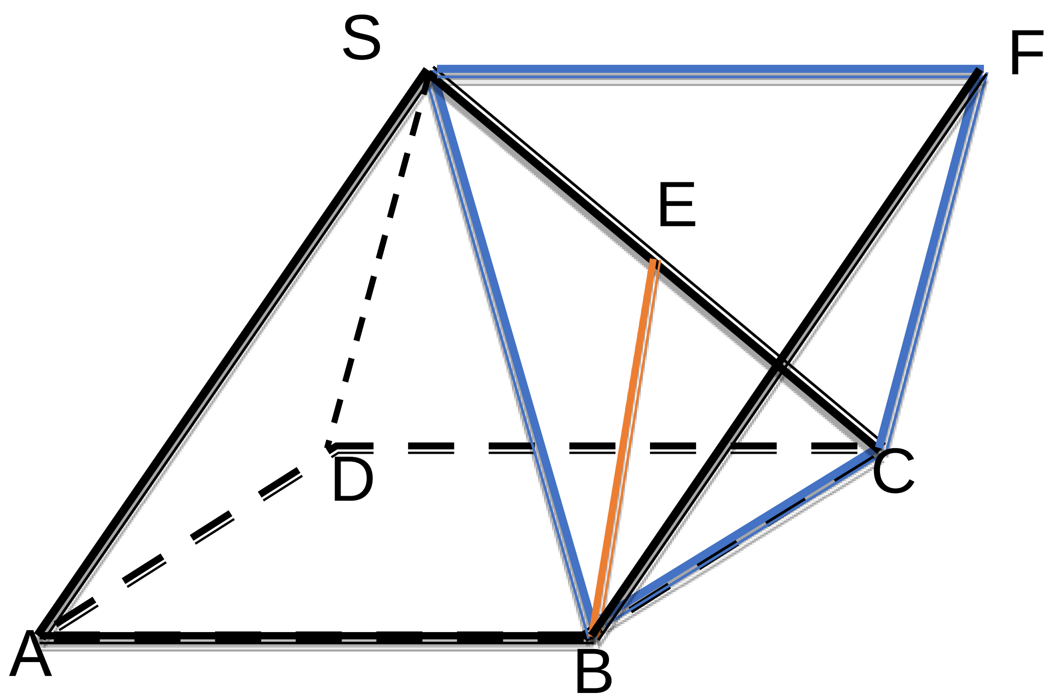
В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой BE и плоскостью SAD, где E – середина ребра SC.




S
F
E
D
C
A
B


S
E
F
K
B
S1
H
C

1. Проведем SF II AB, SF=AB=1
2. В тетраэдре SBCF все ребра равны 1 и (BCF) II (SAD)



3. Перпендикуляр EH опущенный из E на плоскость (BCF) равен половине высоты тетраэдра

4. Из ΔSBS_1 $\angle S1=90°$, $SB=1$

5. BS_1- радиус описанной окружности $R_1 = 2/3 \cdot BK$

ВК – высота равностороннего треугольника, => ВК=$(a\cdot\sqrt{3})/2$, т.е. ВК= $\sqrt{3}/2$, => $R_1 = \sqrt{3}/3$

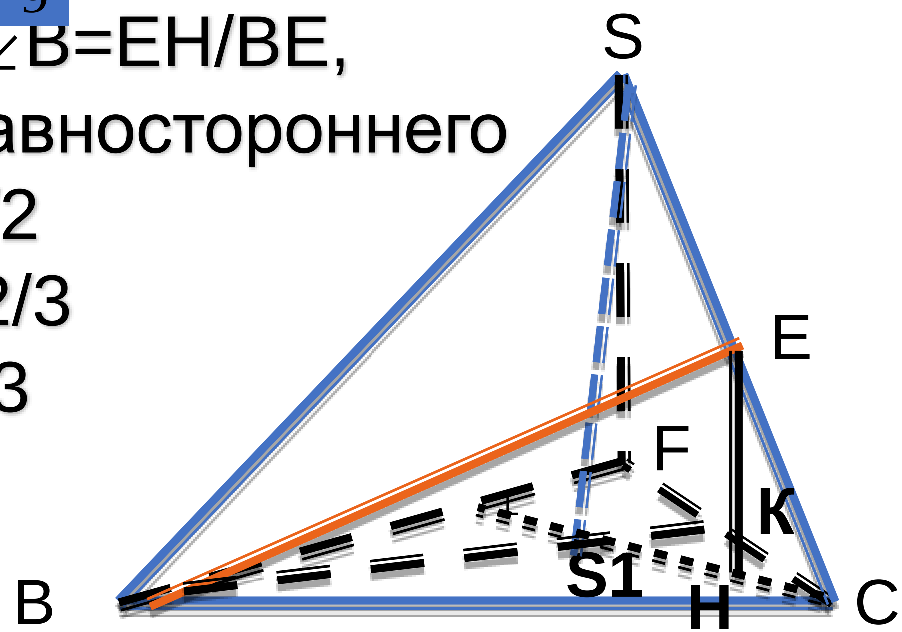
6.$SS1=\sqrt{SB^2-BS_1^2}$; $SS1=\sqrt{1-\frac{3}{9}}$ $SS_1= \sqrt{6}/3$; $EH = \sqrt{6}/6$

7. $\angle$ EBH – искомый, sin $\angle B=EH/BE$,

BE – медиана, высота равностороннего треугольника, =>$BE= \sqrt{3}/2$

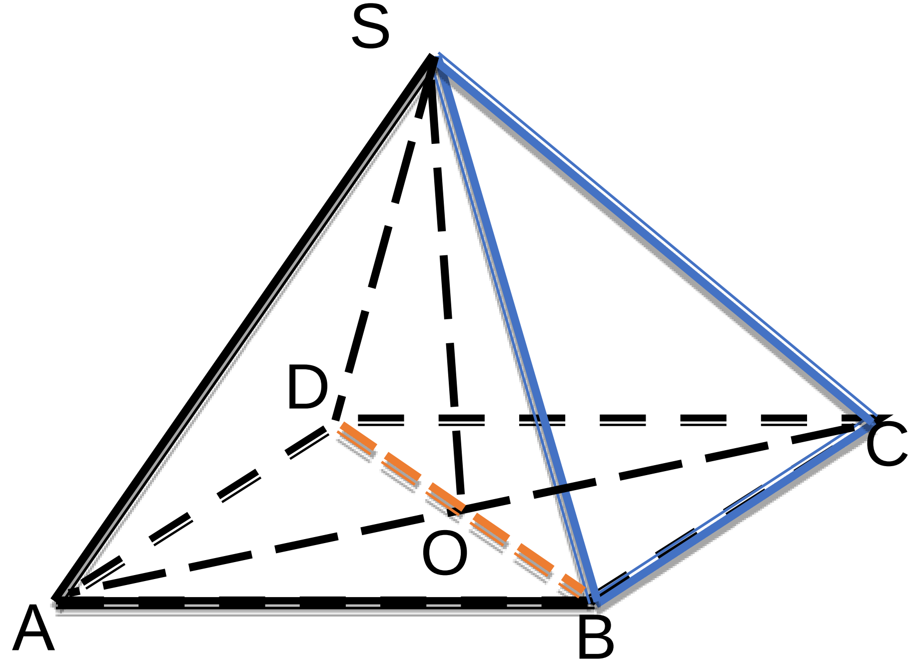
8. sin $\angle B=(\sqrt{6}\cdot 2)/(6\cdot\sqrt{3})=\sqrt{2}/3$

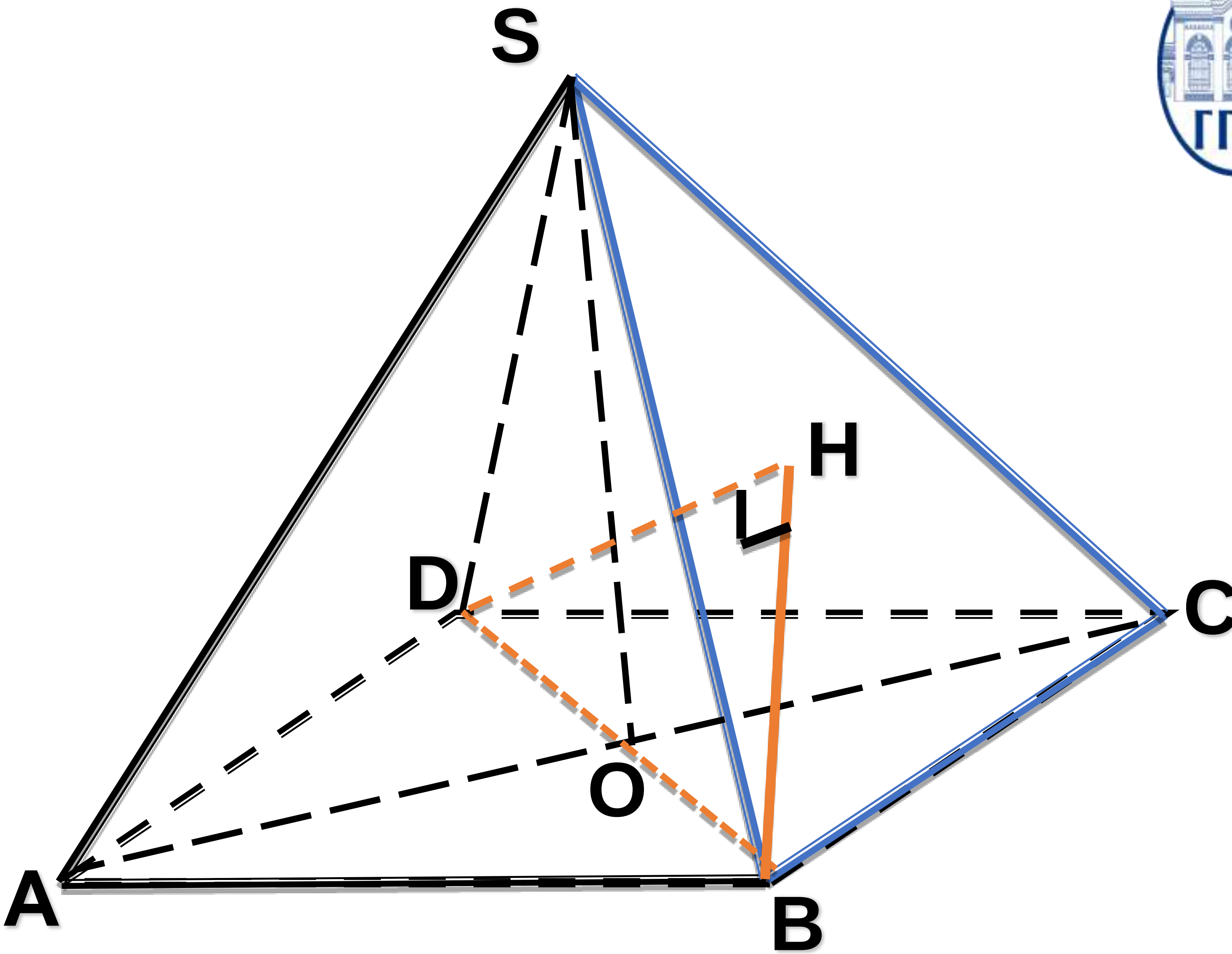
Ответ: $\sqrt{2}/3$



Тренировочная задача

В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1. Найдите синус угла между прямой BD и плоскостью (SBC).




S
H
D
C
O
A
B

1. Проведем DH $\perp$(SBC), тогда $\angle$HBD-искомый угол между прямой BD и плоскостью (BSC);

2. sin$\angle$HBD=DH/BD; BD=√2

3. Для нахождения DH воспользуемся формулой объема пирамиды: $V=1/3\cdot S_{осн}\cdot H$, где H-высота

4. Найдем объем пирамиды SCBD двумя способами:

1).$V_1=1/3\cdot S_{\Delta SBC}\cdot DH$; 2).$V_2=1/3\cdot S_{\Delta DBC}\cdot SO$;

$V_1=1/3\cdot(a^2\sqrt{3}/4)\cdot DH=\sqrt{3}/12\cdot DH$

$V_2=1/3\cdot 1/2\cdot 1\cdot 1\cdot SO=1/6\cdot SO$

5. Найдем SO из ΔSOA –прямоугольный ($\angle SOA=90°$) по т.Пифагора

$SO=\sqrt{AS^2-OA^2}$; $SO=\sqrt{1-\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

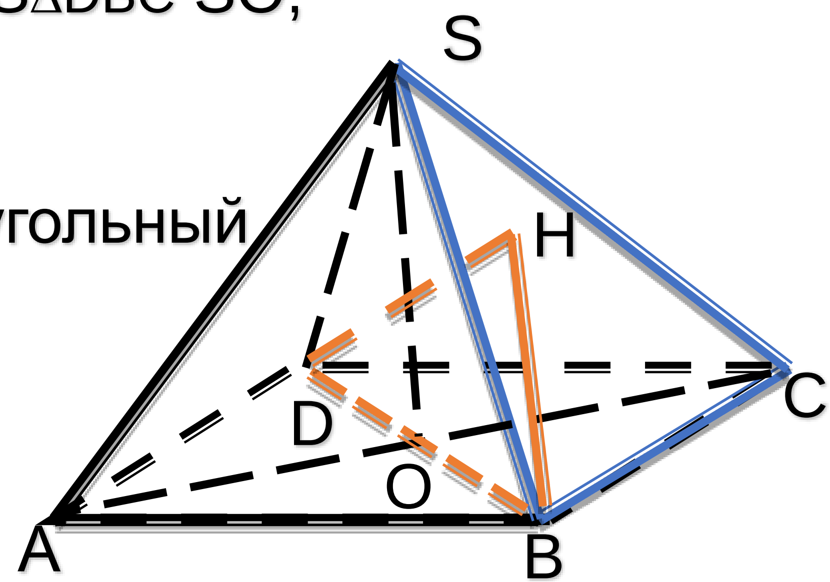
6. $V_2=1/6\cdot\sqrt{2}/2=\sqrt{2}/12$

$V_1=V_2=\sqrt{3}/12\cdot DH=\sqrt{2}/12$

7. $DH=\sqrt{2}/12\cdot 12/\sqrt{3}=\sqrt{2}/\sqrt{3}=\sqrt{6}/3$

8. sin$\angle$HBD$=\sqrt{6}/3\cdot 1/\sqrt{2}=\sqrt{6}/3\sqrt{2}=\sqrt{3}/3$

Ответ: $\sqrt{3}/3$



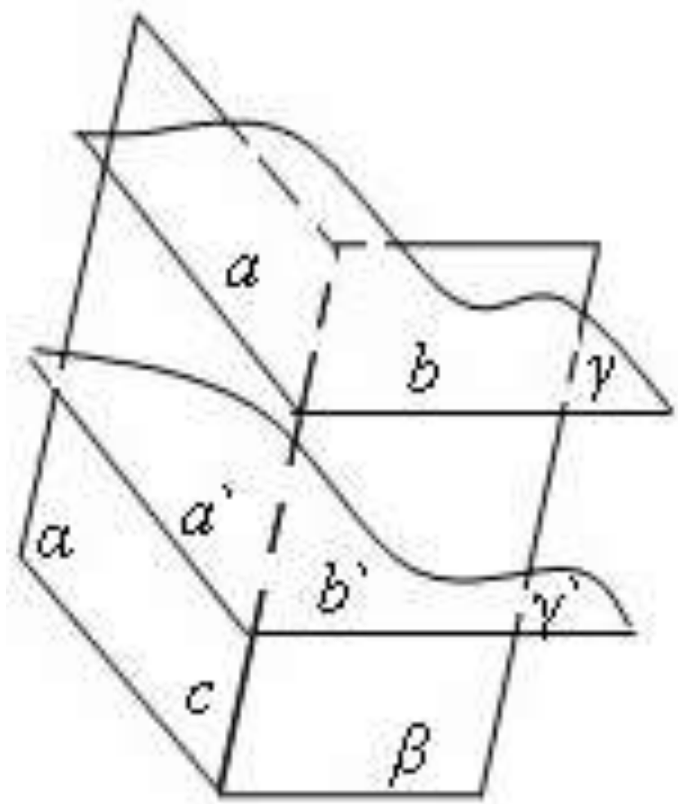
Угол между двумя плоскостями

Двугранный угол, образованный полуплоскостями измеряется величиной его линейного угла, получаемого при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру.

Величина двугранного угла принадлежит промежутку (0°; 180°).

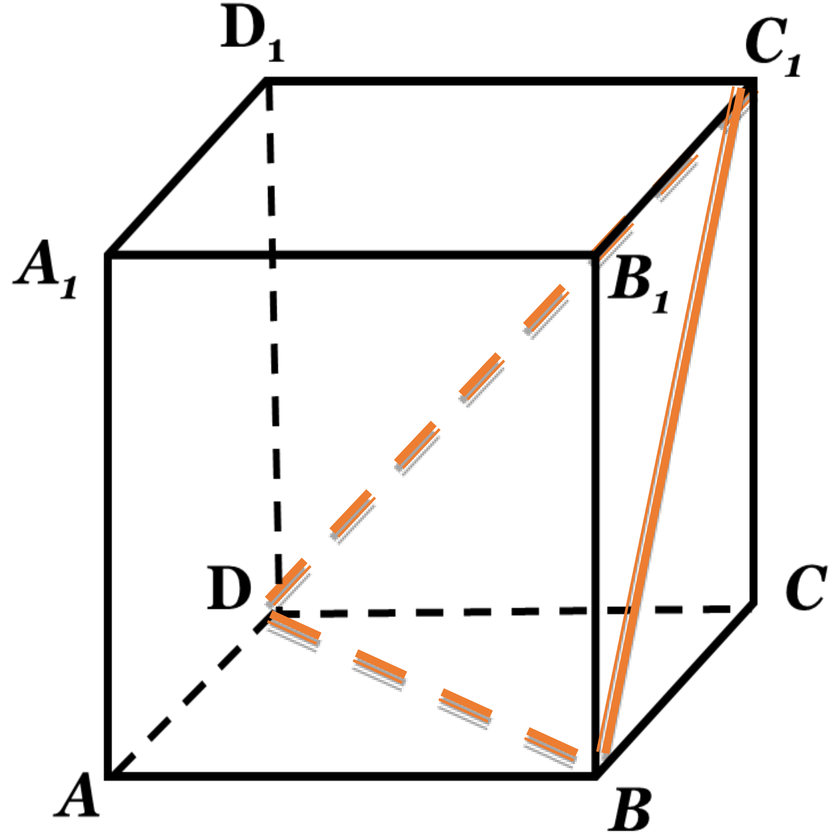
Величина угла между пересекающимися плоскостями принадлежит промежутку (0°; 90°].

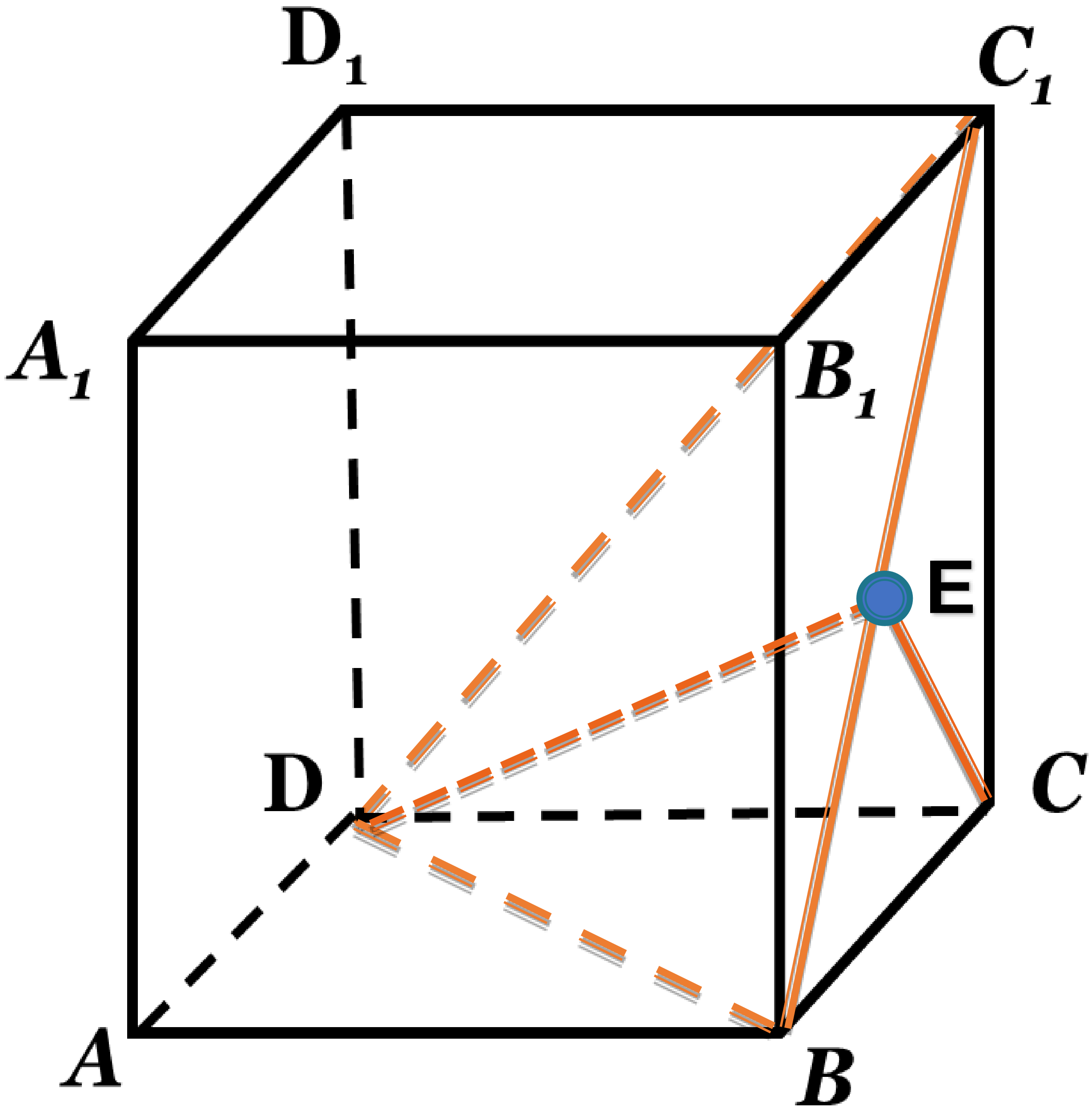
Угол между двумя параллельными плоскостями равен 0° .



Ключевая задача

В единичном кубе A…D1 найдите тангенс угла между плоскостями (AA1D) и (BDC1)




D1
C1
A1
B1
E
D
C
A
B

1. Так как $(AA_1D_1D) \parallel (BB_1C_1C)$
$(BDC_1) \cap (BB_1CC_1) = BC_1$

2. Пусть E-середина BC_1, (т.к. ΔBC_1C- прямоугольный, равнобедренный);

3. $BC=CC_1$

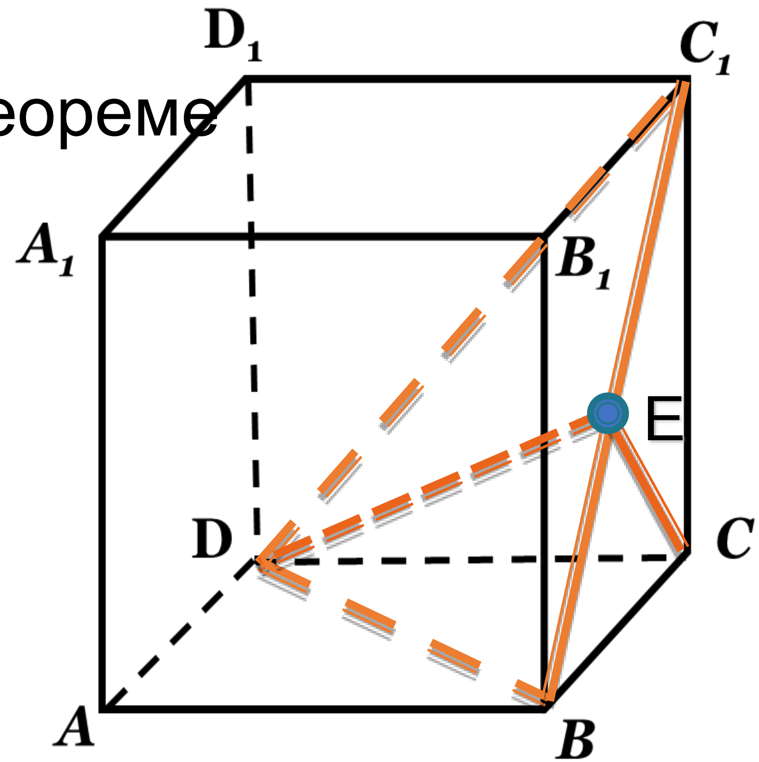
4. $CE \perp BC_1 \Rightarrow DE \perp BC_1$; (по теореме о трех перпендикулярах)

5. т.е. $\angle DEC$ – линейный угол двугранного угла.

6. $\angle ECD=90°$;

7. $tg\angle DEC = DC/EC$; $DC=1$

8. Найдем $EC=\sqrt{2}/2$

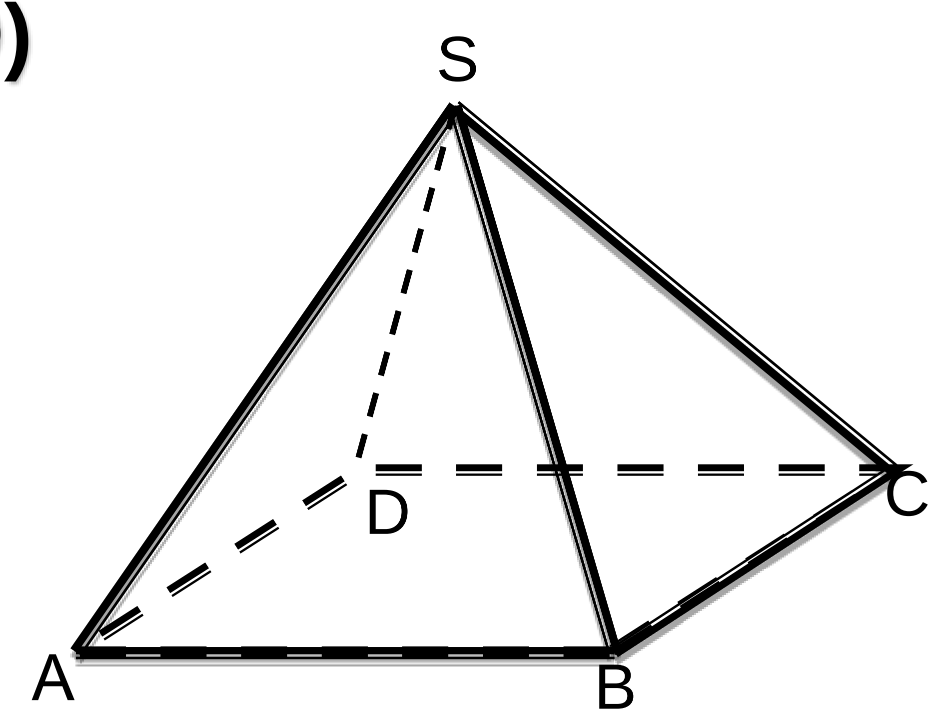


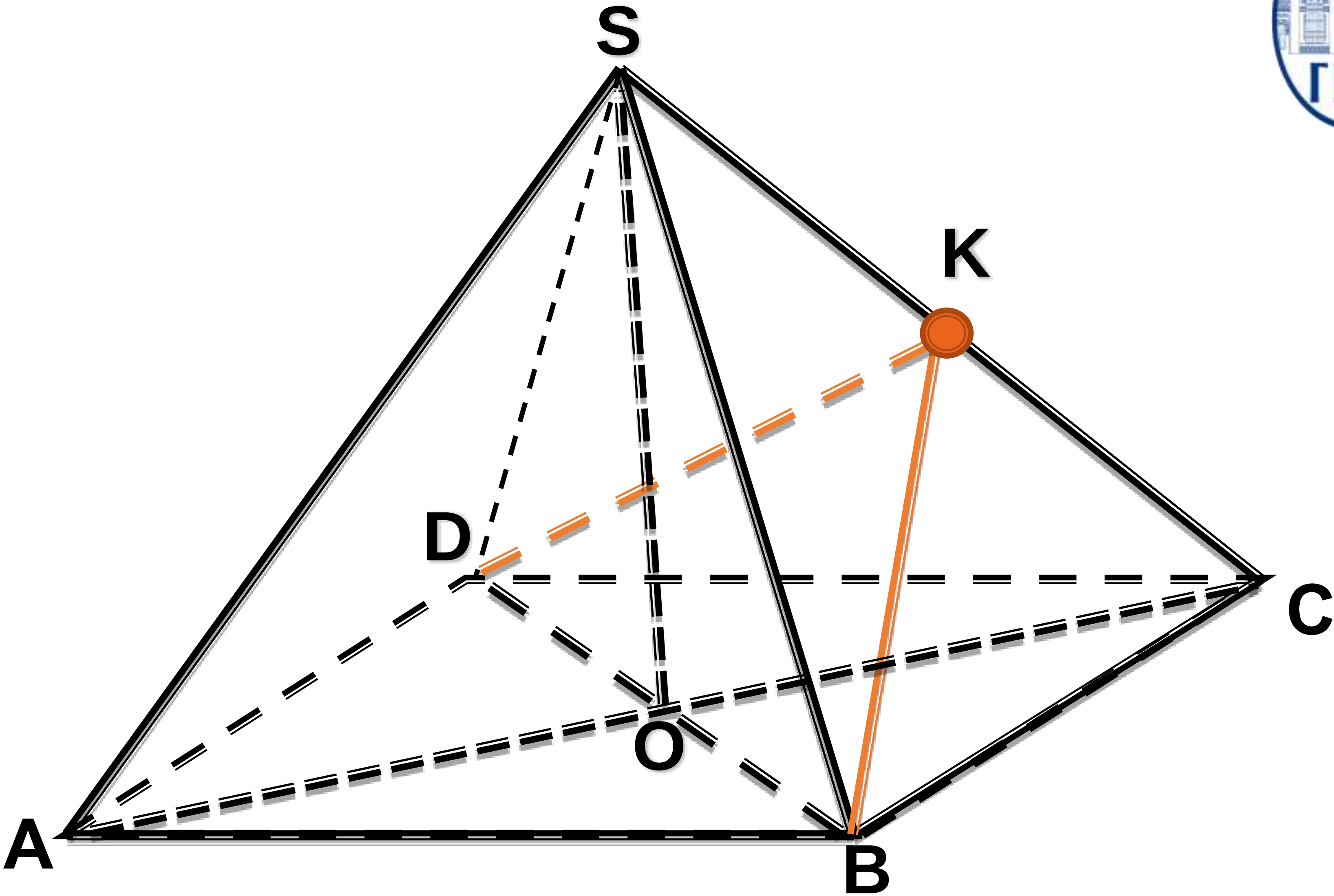
$$tg\angle DEC = \frac{DC}{CE} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

Ответ: $\sqrt{2}$

Тренировочная задача

В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1. Найдите косинус двугранного угла, образованного гранями (SBC) и (SCD)




S
K
D
C
O
A
B

1. (SCB)∩(SDC)=SC

2. Построим линейный угол двугранного угла.

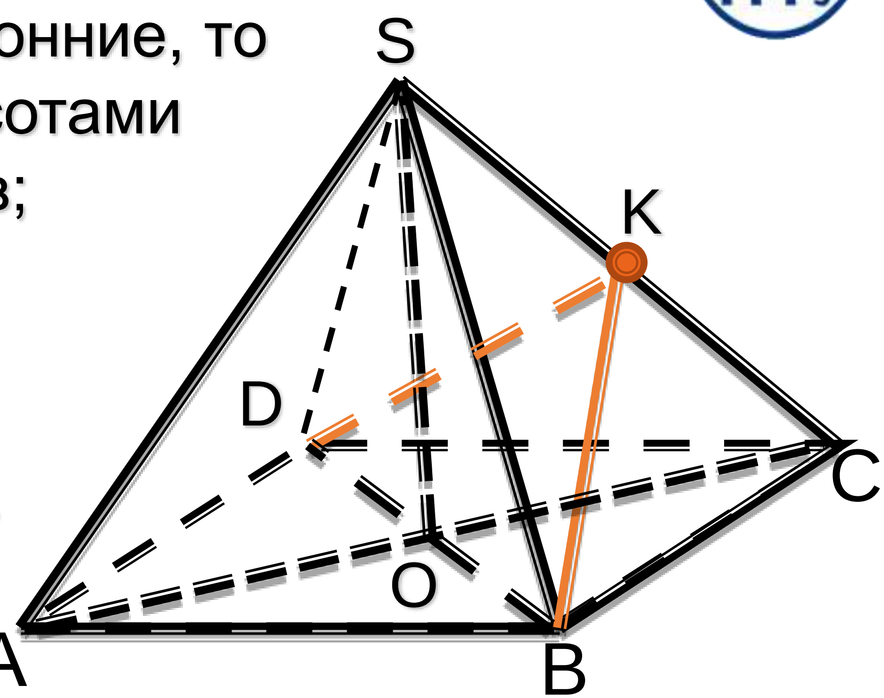
3. Пусть K – середина ребра SC;

4. Т.к. ΔBSC и ΔDSC- равносторонние, то медианы BK и DK являются высотами соответствующих треугольников;

5. Т.к. BK ⊥SC и DK ⊥SC, то ∠DKB- линейный угол искомого двугранного угла

6. DK=KB= (a·√3)/2, где a=1, т.е. DK=KB =√3/2

7. DB=√2 (диагонали квадрата)



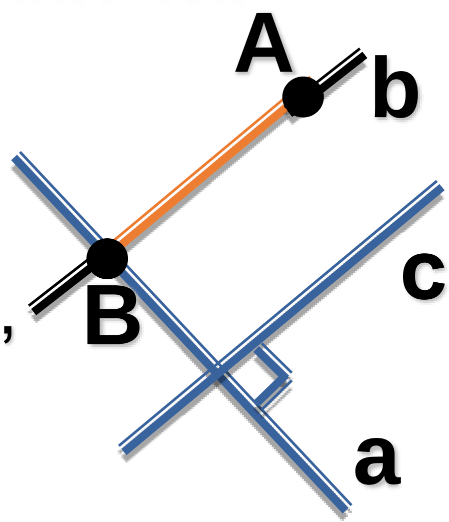
8. Из ΔDKB по теореме косинусов найдем угол.

cos∠DKB= $\dfrac{KB^2+DK^2-BD^2}{2\cdot BK\cdot DK}$ cos∠DKB= $\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$

Ответ: (-1)/3

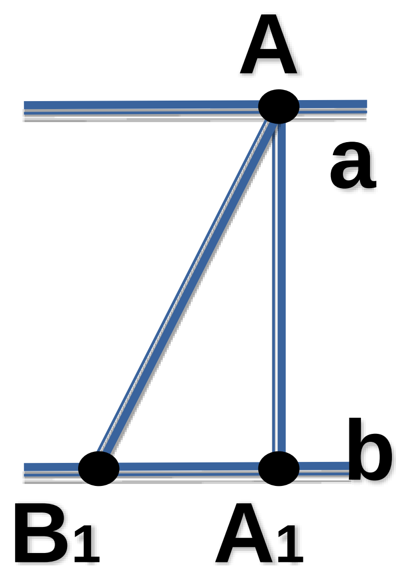
Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки до прямой, не содержащей эту точку, есть длина отрезка – перпендикуляра, проведенного из этой точки на прямую.



$A \notin a$;
проводим $c \perp a$;
через A прямую $b \parallel c$;
$\Rightarrow b \perp a$,
$AB \perp a$.
AB – искомое расстояние.

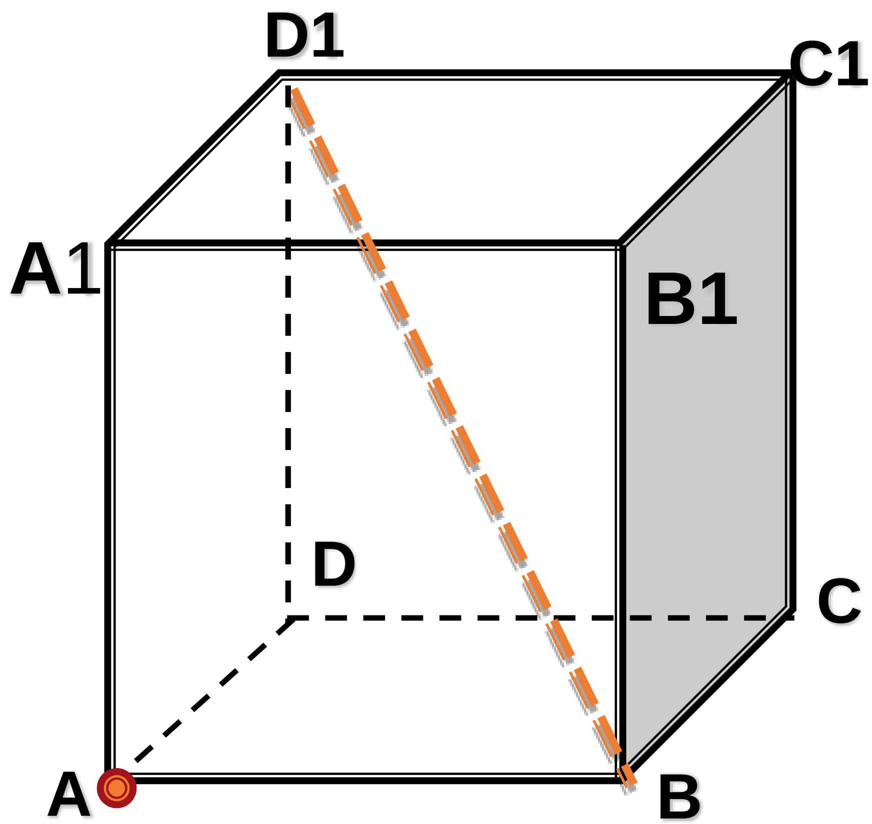
Расстояние между двумя параллельными прямыми равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до другой прямой.

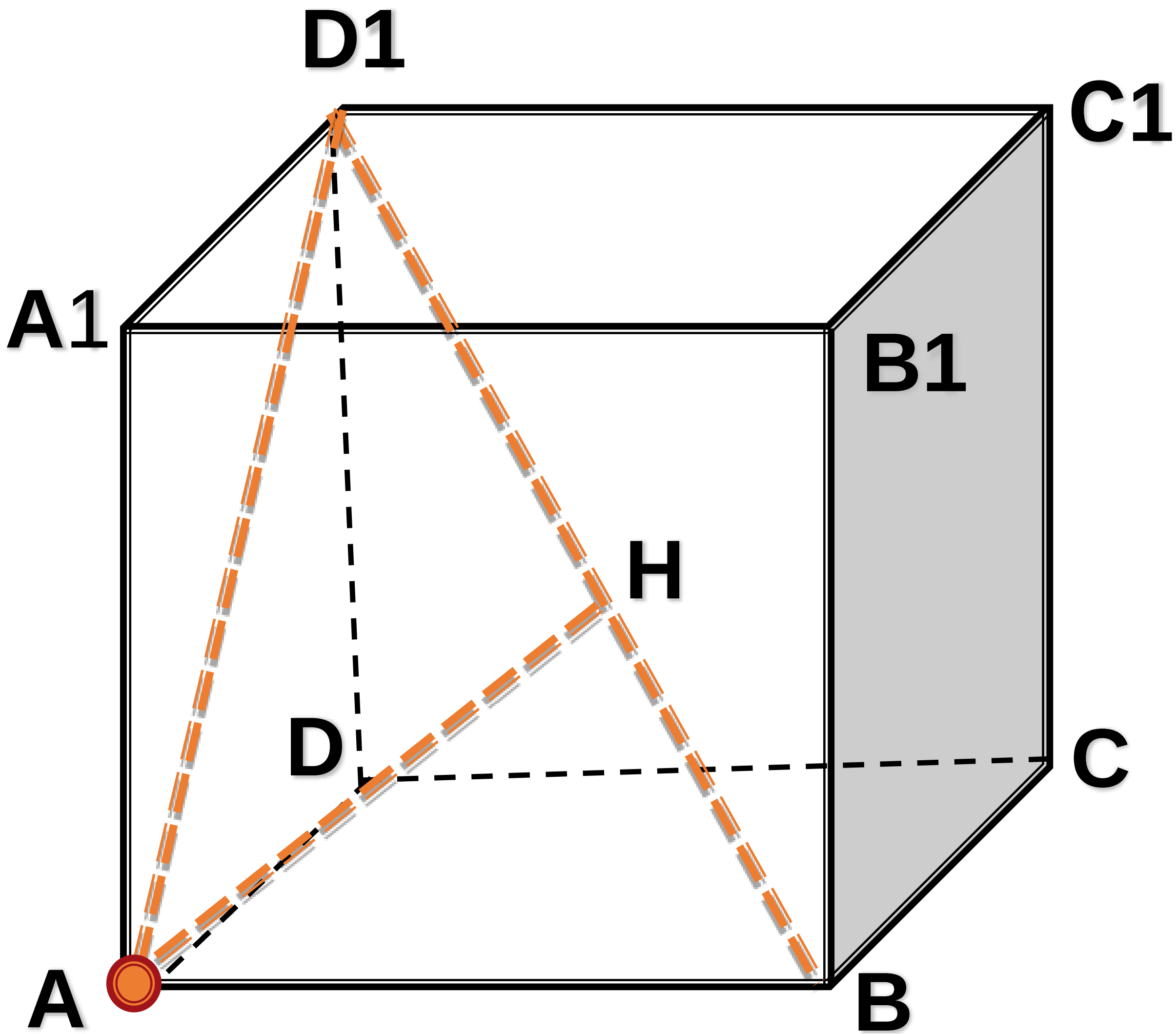


$a \parallel b$, $A \in a$, $\Rightarrow$ AA_1 – искомое расстояние

Ключевая задача

В единичном кубе A…D1 найдите расстояние от точки A до прямой BD1.




D1
C1
A1
B1
H
D
C
A
B

1. Из точки A опустим перпендикуляр на прямую BD_1
2. AH – искомое расстояние
3. Рассмотрим ΔABD_1 – прямоугольный ($\angle D1AB=90°$)
4. Из ΔABD_1: $AB=1$, $AD1=\sqrt{2}$ (по т.Пифагора), $BD1=\sqrt{3}$ (как диагональ единичного куба)
5. Найдем AH используя способ площадей. Найдем площадь ΔABD_1 двумя способами:
6. $S_1=1/2\cdot AD_1\cdot AB$

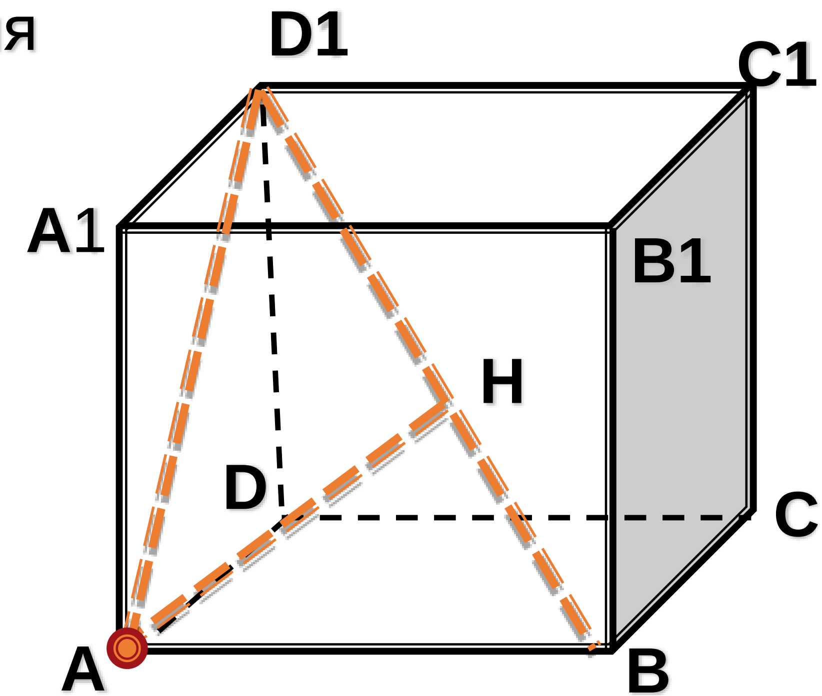
$S_2=1/2\cdot AH\cdot BD_1$

7. $S_1= 1/2\cdot\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}/2$,

так как $S_1=S_2$, то $\sqrt{2}/2=1/2\cdot AH\cdot\sqrt{3}$

8. Отсюда, $AH = \sqrt{6}/3$

Ответ: $\sqrt{6}/3$



2 СПОСОБ

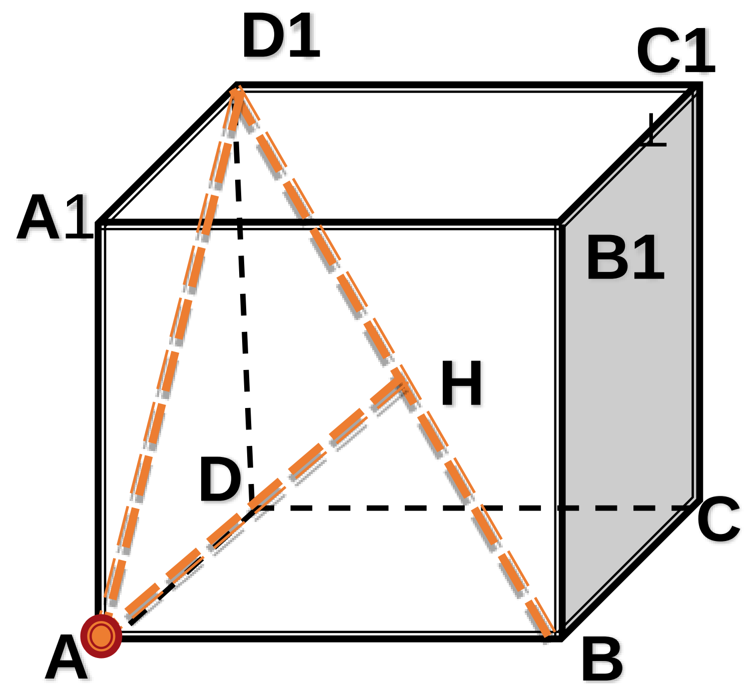
1. Из точки А опустим перпендикуляр на прямую BD_1
2. АН – искомое расстояние
3. Рассмотрим ΔABD_1 – прямоугольный ($\angle D1AB=90°$)
4. Из ΔABD_1: $AB=1$, $AD_1=\sqrt{2}$ (по т.Пифагора), $BD_1=\sqrt{3}$ (как диагональ единичного куба)
5. Рассмотрим ΔBAD_1 и ΔBHA.
6. $\Delta BAD_1 \sim \Delta BHA$ по трем углам:

$\angle B$ – общий, $\angle BHA=\angle BAD_1=90°$, =>

$\angle BAH=\angle AD1H$

7. Из подобия треугольников следует и пропорциональность сторон: $AD_1/BD_1= AH/AB$
8. $AH=(AD_1 \cdot AB)/BD_1$
9. $AH=(\sqrt{2}\cdot 1)/\sqrt{3}=\sqrt{2}/\sqrt{3}=(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3})/(\sqrt{3}\cdot\sqrt{3})=\sqrt{6}/3$

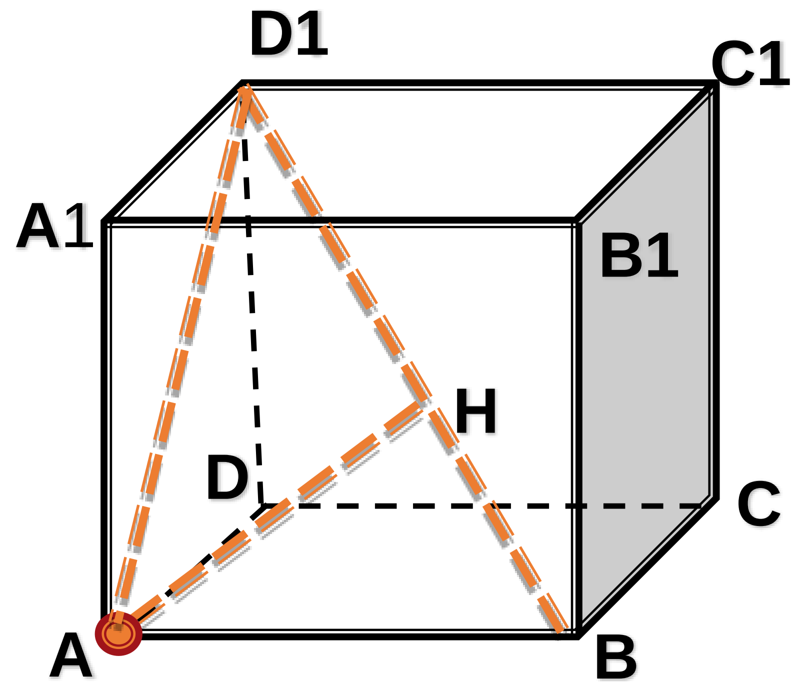
Ответ: $\sqrt{6}/3$



3 СПОСОБ

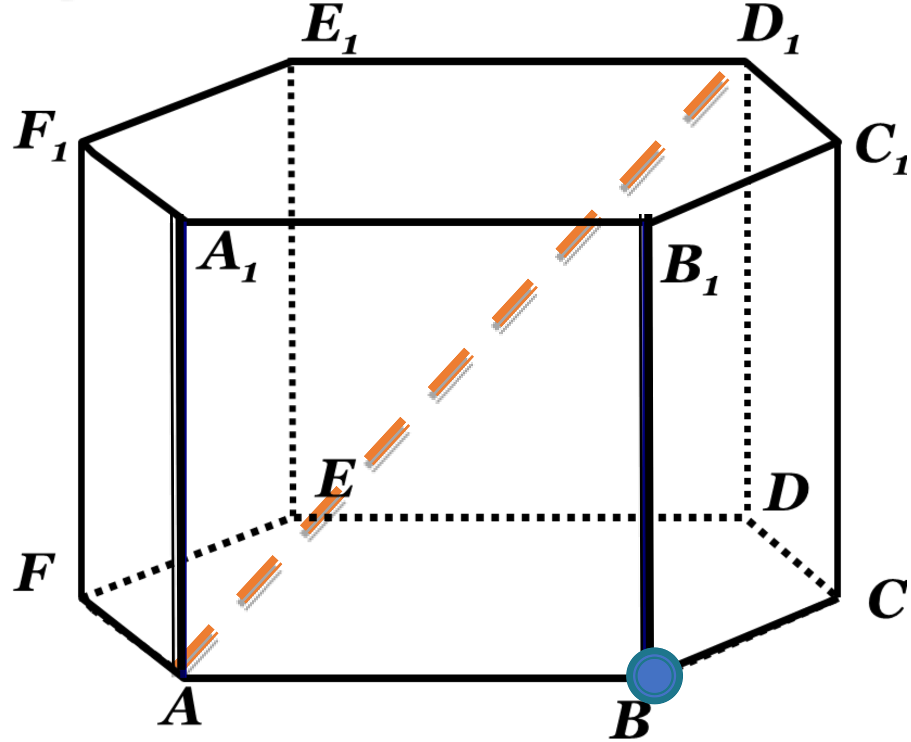
1. Из точки А опустим перпендикуляр на прямую BD_1
2. АН – искомое расстояние
3. Рассмотрим ΔABD_1 – прямоугольный ($\angle D_1AB=90°$)
4. Из ΔABD_1: $AB=1$, $AD_1=\sqrt{2}$ (по т.Пифагора), $BD_1=\sqrt{3}$ (как диагональ единичного куба)
5. Из ΔABD_1: $\sin\angle ABD_1=\sqrt{6}/3$
6. $\Rightarrow AH=AB\cdot\sin\angle ABD_1=\sqrt{6}/3$

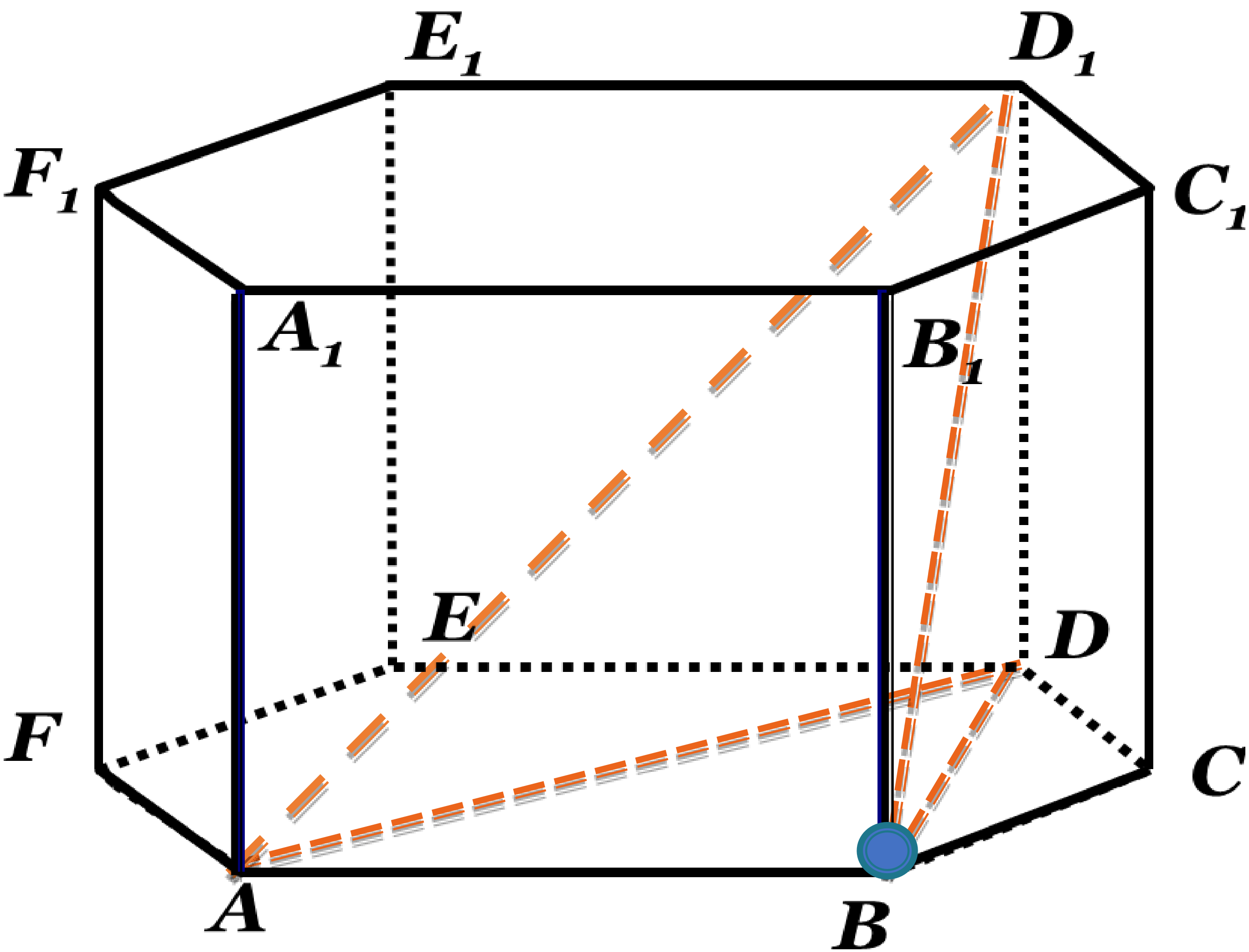
Ответ: $\sqrt{6}/3$



Тренировочное задание

В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$, все ребра которой равны 1. Найдите расстояние от точки B до прямой AD_1.




E1
D1
F1
C1
A1
B1
E
D
F
C
A
B

1. В ΔAD_1B: AB=1, AD1=$\sqrt{AD^2+DD_1^2}$

(Из ΔADD_1;$\angle D=90°$)

2. AD1=$\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

3. BD1= $\sqrt{BD^2+DD_1^2}$;(Из ΔBDD_1;$\angle D=90°$), BD1= $\sqrt{3+1}=\sqrt{4}$

4. ΔABD_1 – прямоугольный ($\angle D_1BA=90°$)

(По теореме о трех перпендикулярах $BD\perp AB$)

5. Для нахождения расстояния от точки В до прямой AD1: ВН воспользуемся формулами площадей:

6. $S_{\Delta ABD_1}=1/2\cdot AB\cdot BD_1$

$S_{\Delta ABD_1}=1/2\cdot 1\cdot 2=1$

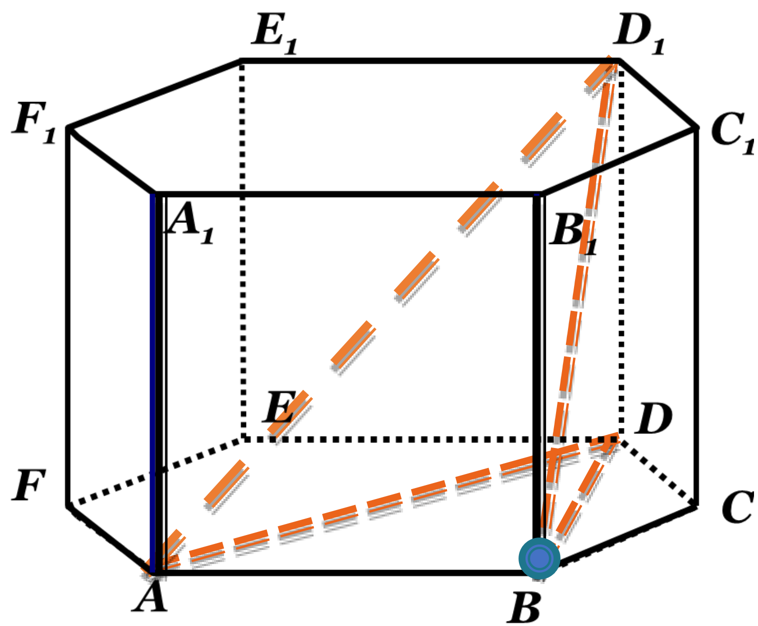
7. $S_{\Delta ABD_1}=1/2\cdot AD1\cdot BH$,

где $BH\perp AD_1$

8. $BH=(2\cdot S_{\Delta ABD_1})/ AD_1$;

$BH=(2\cdot 1)/\sqrt{5}=2/\sqrt{5}=2\sqrt{5}/5$

Ответ: $2\sqrt{5}/5$

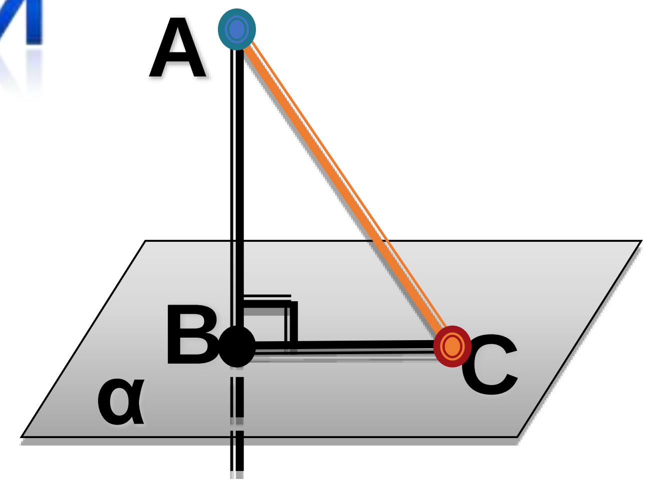


РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

Расстояние от точки до плоскости, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью равно длине их общего перпендикуляра.

Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью равно расстоянию от любой точки этой прямой до плоскости.

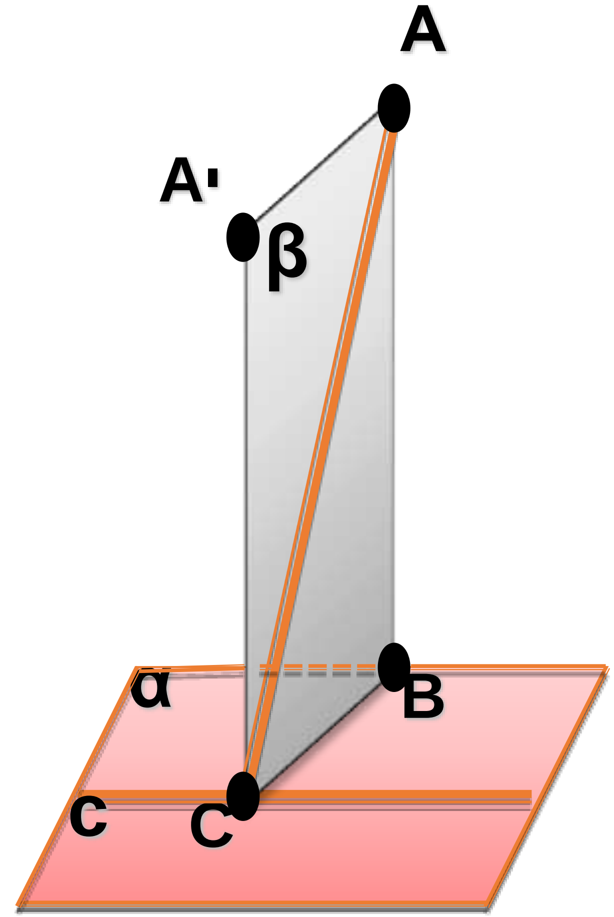


Из точки A проведены к плоскости α перпендикуляр AB и наклонная AC. Точка B – основание перпендикуляра, точка C – основание наклонной, BC – проекция наклонной AC на плоскость α.

Для решения задач такого типа приходится применять **теорему о трех перпендикулярах:**

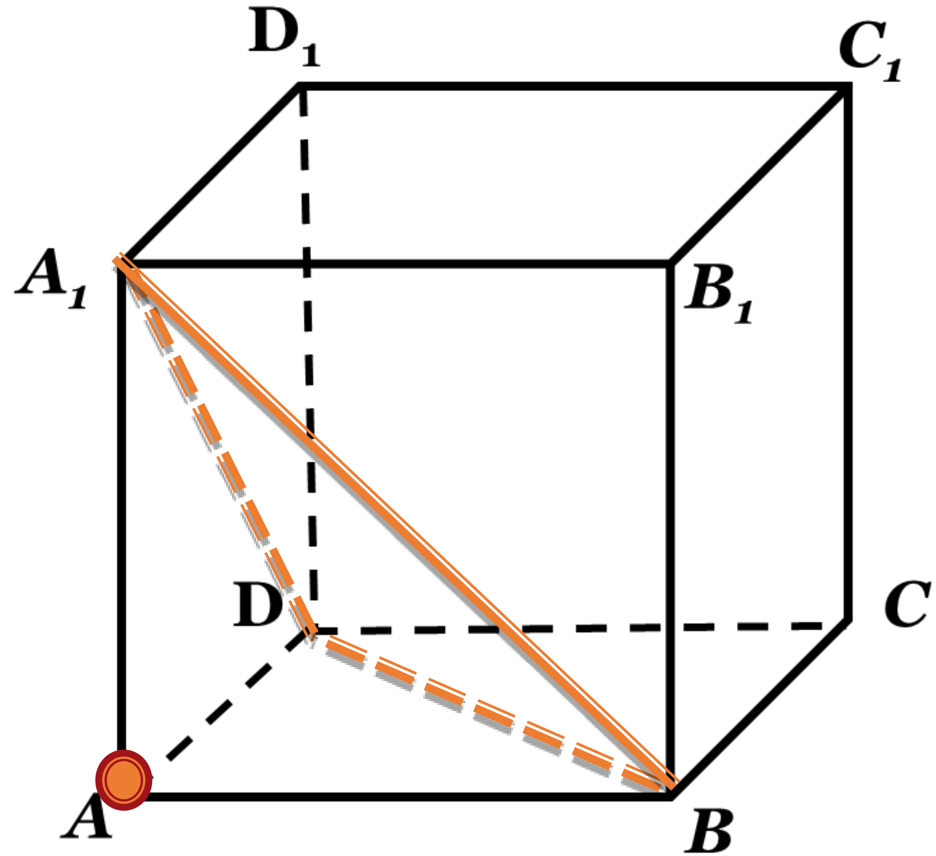
Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна наклонной.

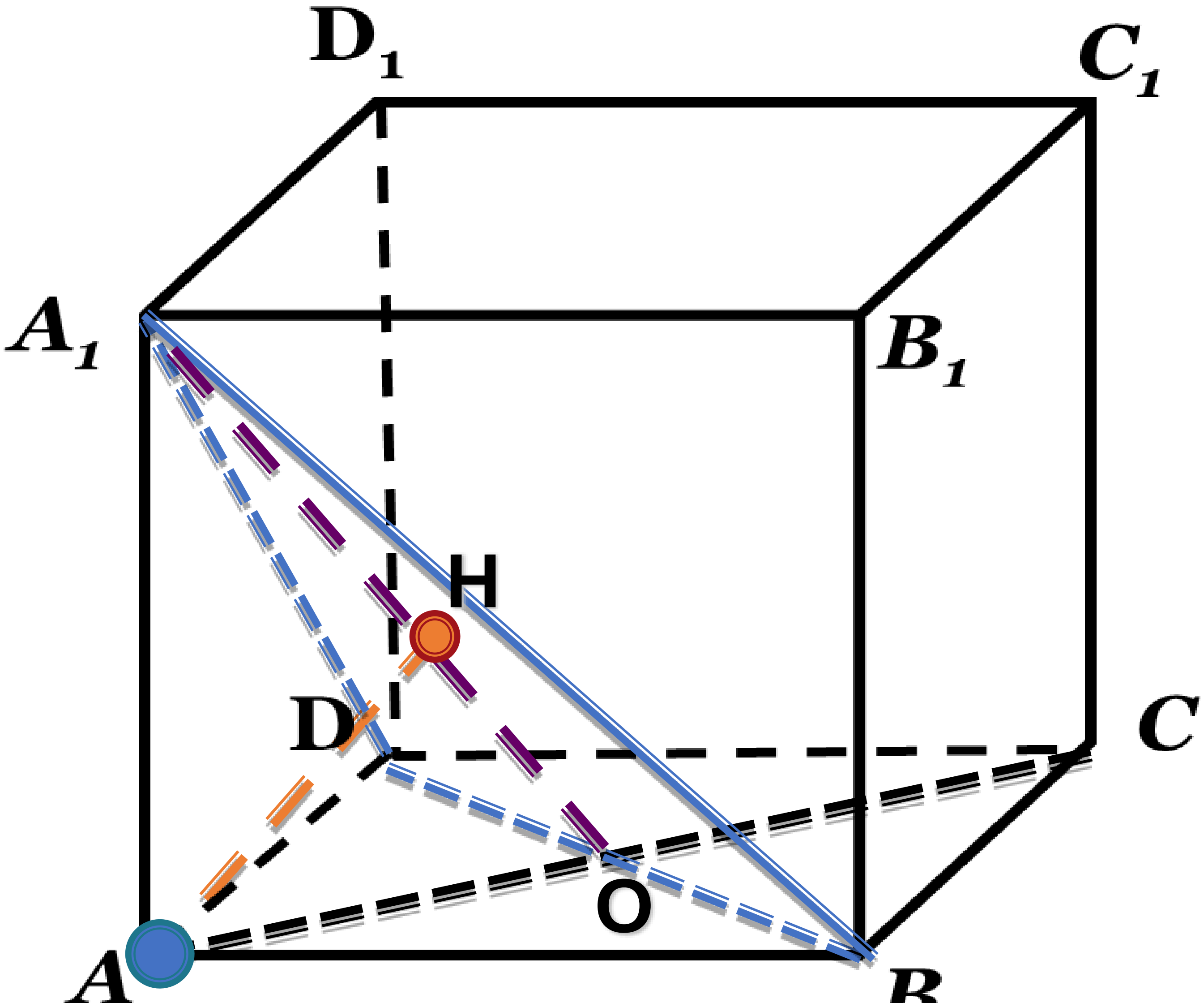
И обратно: **если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.**



Ключевая задача

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BDA_1



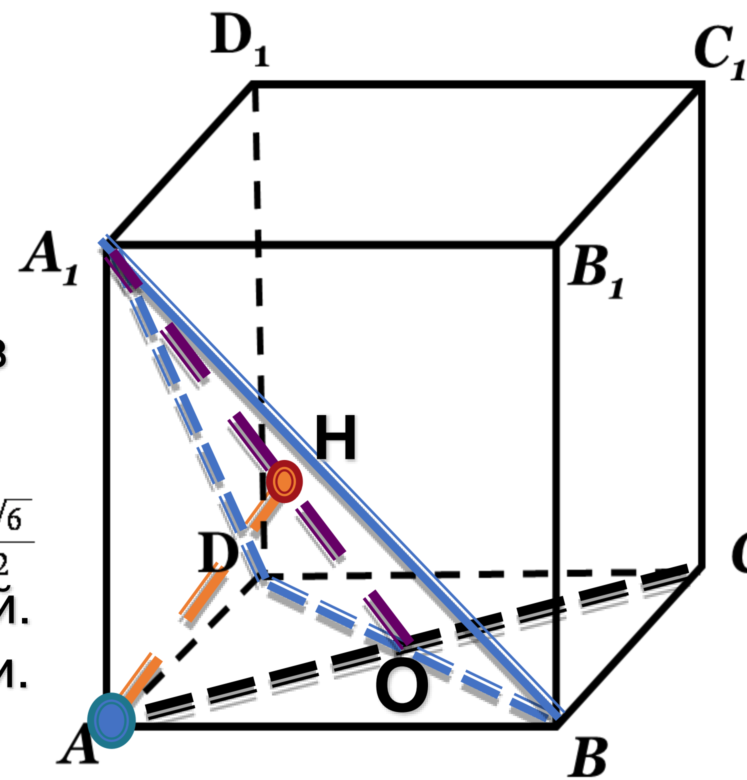

D1
C1
A1
B1
H
D
C
O
A
B

1 СПОСОБ

1. O – середина BD,
2. Т.к. AC и BD–диагонали квадрата; $AC \perp BD$
3. Значит по теореме о трех перпендикулярах $BD \perp A_1O$
4. $(BDA_1) \cap (AA_1O) = A_1O$
По признаку $BD \perp (AA_1O)$
5. Искомый перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость (BDA_1) является высота AH прямоугольного $\Delta\ AA_1O$
6. $AA_1=1$; $AO=\sqrt{2}/2$; $A_1O=\sqrt{AO^2+AA_1^2}=\sqrt{1+\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$
7. Найдем AH используя способ площадей. Площадь ΔAA_1O найдем двумя способами.
8. $S_{\Delta AA_1O}=(1/2)\cdot AA_1\cdot AO$
$S_{\Delta AA_1O}=(1/2)\cdot 1\cdot (\sqrt{2}/2)=\sqrt{2}/4$
9. $S_{\Delta AA_1O}=(1/2)\cdot A_1O\cdot AH$,

$$\Rightarrow AH= \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{12}}{6}=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\sqrt{3}/3$



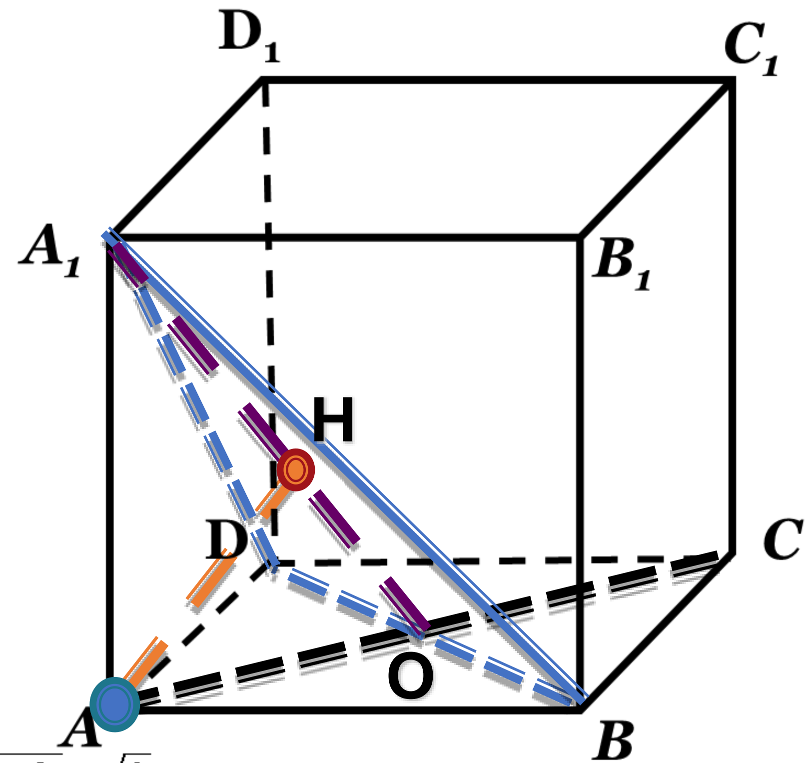
2 СПОСОБ

1. O – середина BD,
2. Тогда AC и BD–диагонали квадрата; $AC \perp BD$
3. Значит по теореме о трех перпендикулярах $BD \perp A_1O$
4. $(BDA_1) \cap (AA_1O) = A_1O$

По признаку $BD \perp (AA_1O)$

5. Искомый перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость (BDA_1) является высота AH прямоугольного $\Delta\, AA_1O$
6. $AA_1=1$; $AO=\sqrt{2}/2$; $A_1O=\sqrt{AO^2+AA_1^2}=\sqrt{1+\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$
7. Из ΔAA_1O: $\sin\angle AOA_1=\sqrt{6}/3$, $\Rightarrow AH=AO\cdot\sin\angle AOH=\sqrt{3}/3$

Ответ: $\sqrt{3}/3$



3 СПОСОБ

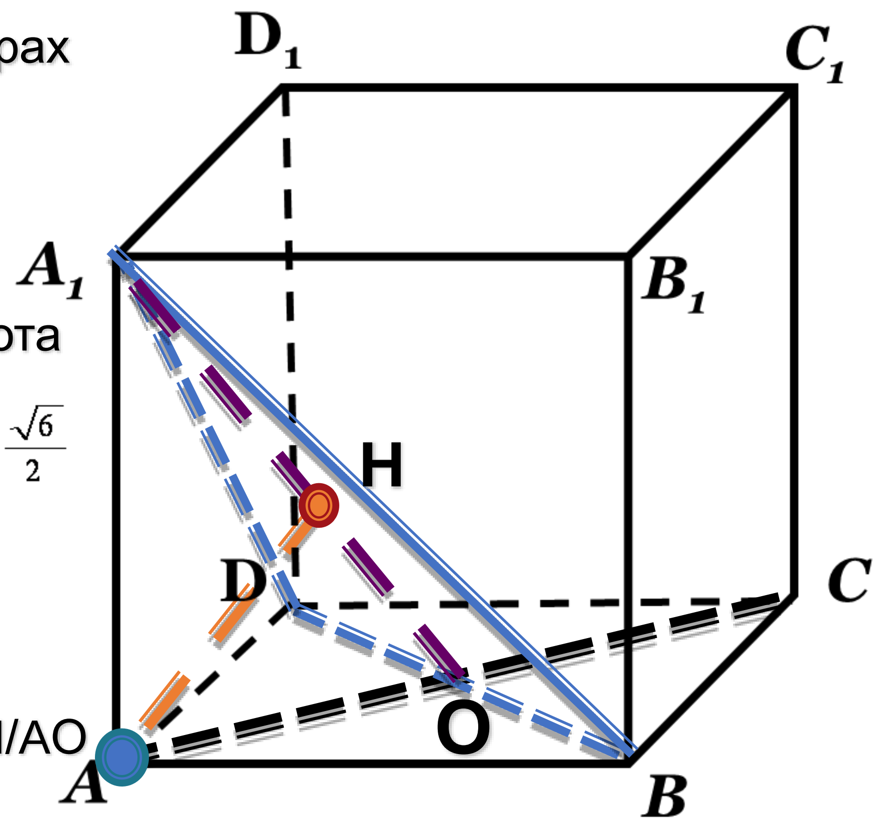
1. O – середина BD,
2. Тогда AC и BD–диагонали квадрата; $AC \perp BD$
3. Значит по теореме о трех перпендикулярах $BD \perp A_1O$
4. $(BDA_1) \cap (AA_1O) = A_1O$

По признаку $BD \perp (AA_1O)$

5. Искомый перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость (BDA_1) является высота AH прямоугольного $\Delta\, AA_1O$
6. $AA_1=1$; $AO=\sqrt{2}/2$; $A_1O=\sqrt{AO^2+AA_1^2}=\sqrt{1+\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$
7. Рассмотрим $\Delta AOA1$ и ΔHOA.
6. $\Delta AOA1 \sim \Delta HOA$ по двум углам: $\angle O$ – общий, $\angle OHA = \angle OAA1 = 90°$,
7. Из подобия треугольников следует и пропорциональность сторон: $AA1/OA1 = AH/AO$
8. $AH=(AA1 \cdot AO)/A1O$

9. AH= $\dfrac{1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{12}}{6}=\dfrac{2\cdot\sqrt{3}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $\sqrt{3}/3$



4 СПОСОБ

Рассмотрим пирамиду AA_1BD и найдем объем двумя способами.

Пусть AH-искомый перпендикуляр

$V=1/3 \cdot S_{осн} \cdot H$, где H-высота

1). $V_1=1/3 \cdot S_{\Delta ABD} \cdot AA_1$;

2). $V_2=1/3 \cdot S_{\Delta A_1BD} \cdot AH$;

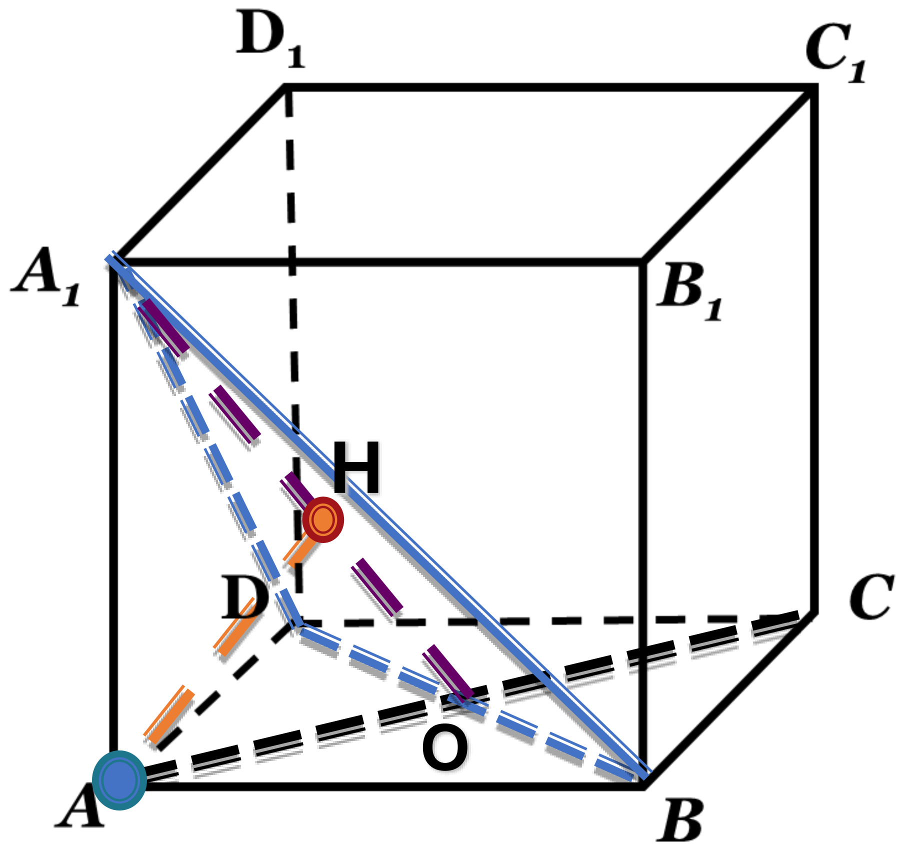
$V_1=1/3 \cdot 1/2 \cdot 1=1/6$

$V_2= \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot AH$, где $a=\sqrt{2}$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot AH$$

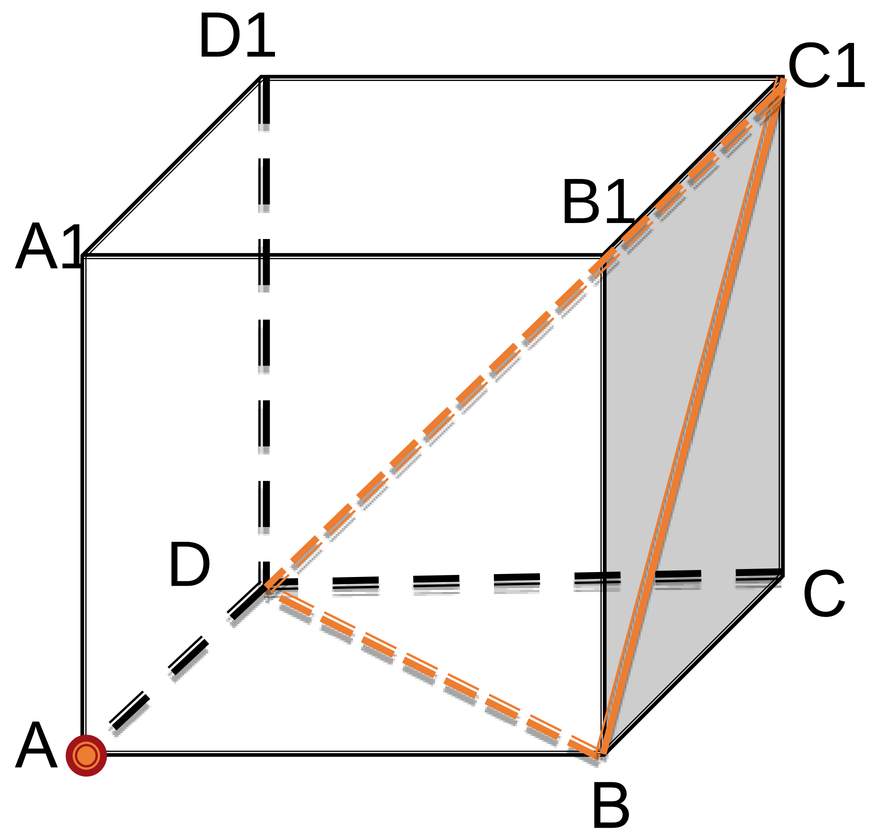
$$AH= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{6}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

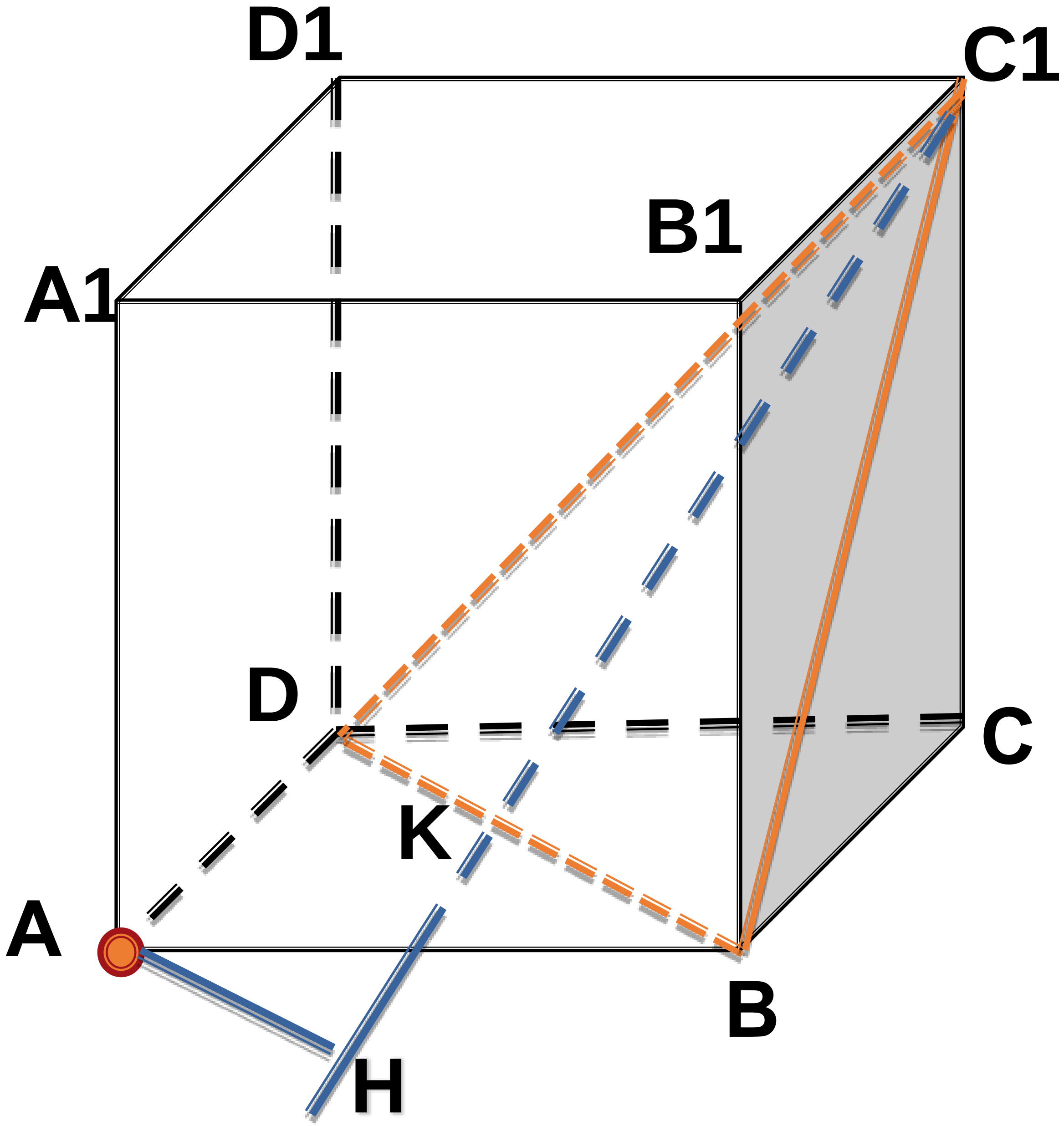
Ответ: $\sqrt{3}/3$



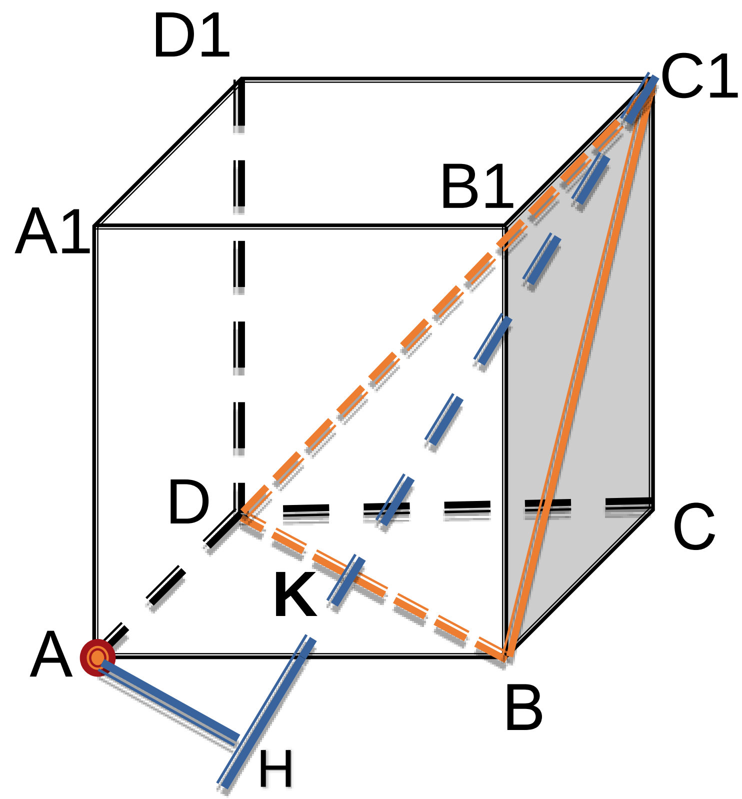
Тренировочная задача

В единичном кубе A…D1 найдите расстояние от точки A до плоскости (BDC_1).

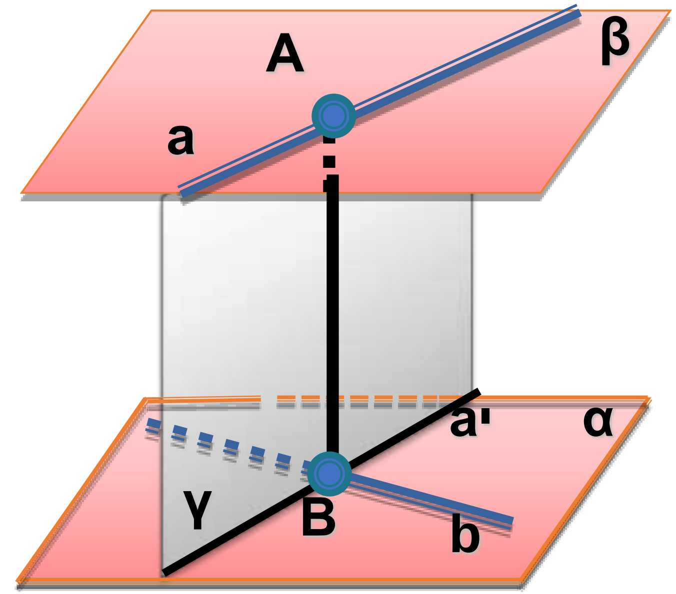



D1
C1
B1
A1
D
C
K
A
B
H

Воспользуемся формулами объемов для пирамиды C_1BAD.
Пусть AH-искомое расстояние
$V=1/3\cdot S_{осн}\cdot H$, где H-высота
1). $V_1=1/3\cdot S\Delta ABD\cdot CC_1$;
$CC_1=1$; $S\Delta ABD=1/2\cdot 1\cdot 1=1/2$
$V_1=1/3\cdot 1/2\cdot 1=1/6$
2). $V_2=1/3\cdot S\Delta C_1BD\cdot AH$;
$S\Delta C_1BD=(a^2\cdot\sqrt{3}/4)$, где $a=\sqrt{2}$
$S\Delta C_1BD=(2\cdot\sqrt{3}/4)=\sqrt{3}/2$
$V_2=1/3\cdot\sqrt{3}/2\cdot AH=\sqrt{3}/6\cdot AH$
Из 1) и 2)
$1/6=\sqrt{3}/6\cdot AH$
$AH=(1/6)\cdot(6/\sqrt{3})=1/\sqrt{3}=\sqrt{3}/3$
Ответ: $\sqrt{3}/3$



РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ



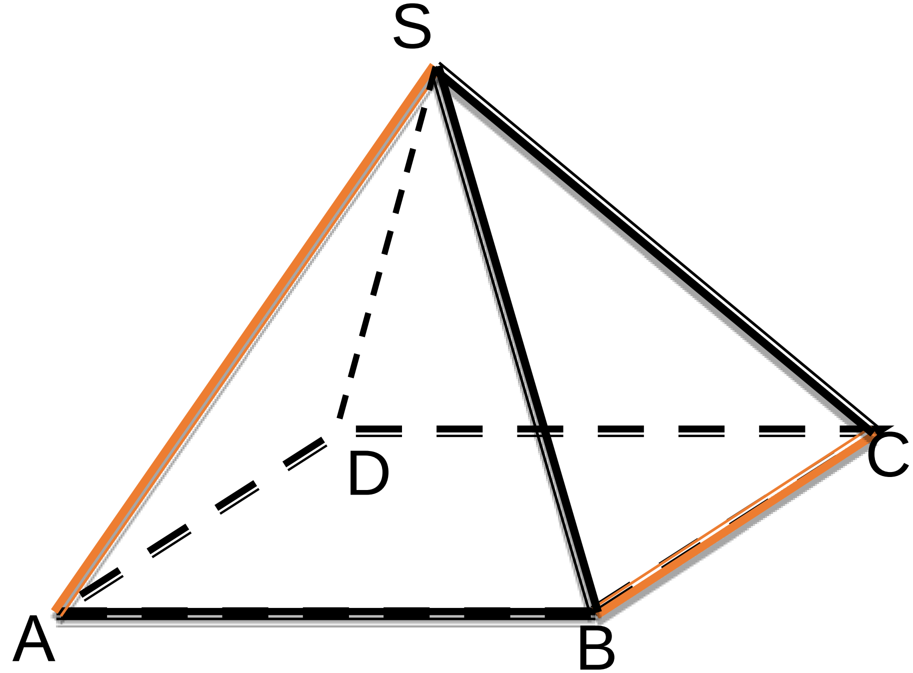
Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра.

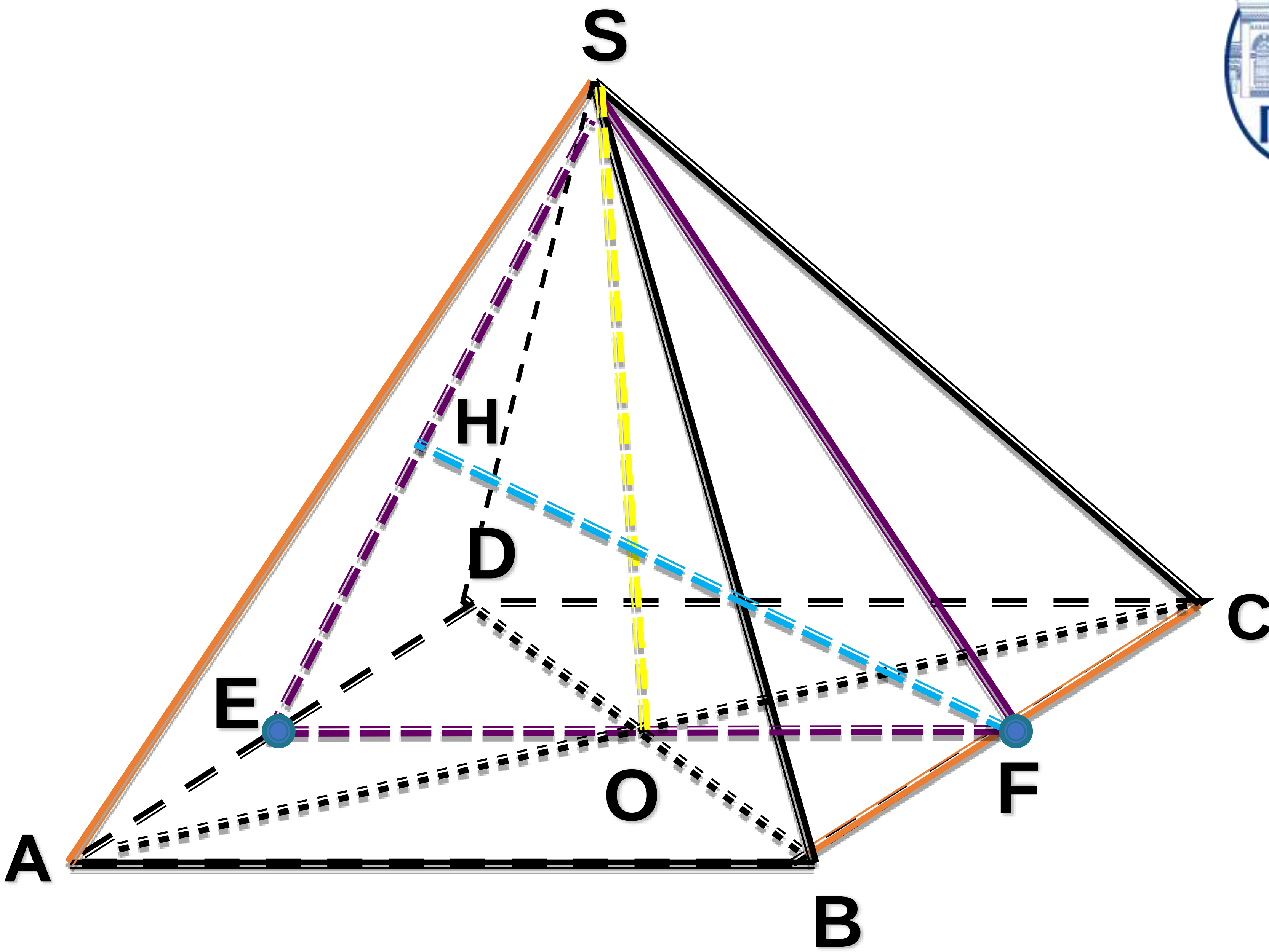
Две скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр и притом только один.

Он является общим перпендикуляром параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые.

Ключевая задача

В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1. Найдите расстояние между прямыми SA и BC.




S
H
D
C
E
F
O
A
B

1. Прямые BC и SA - скрещивающиеся

2. Прямая BC⊂(SBC); Прямая SA ⊂(SAD);

3. BC II (SAD) => расстояние между скрещивающимися прямыми SA и BC равно расстоянию от прямой BC до плоскости (SAD);

4. Пусть E и F соответственно середины ребер AD и BC. Тогда искомым перпендикуляром будет высота FH ∆SEF.

5. В ∆SEF: EF=AB=1; SE=SF-высоты равнобедренных ∆SAD и ∆SBC соответственно, => SE=SF=√3/2

SO – высота четырехугольной пирамиды из прямоугольного ∆SOF по теореме Пифагора: SO=√2/2.

6. Найдем FH используя метод площадей. Площадь ∆SEF найдем двумя способами.

7. S ∆SEF=(1/2)·EF·SO

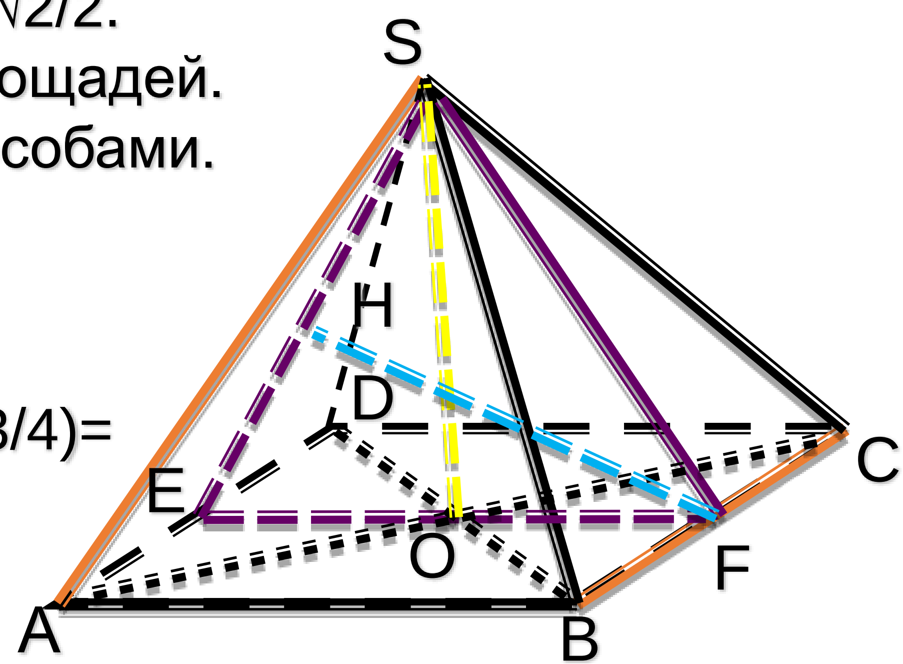
S∆SEF=(1/2)·1· (√2/2)=√2/4

8. S ∆SEF=(1/2)·SE·HF,

=> HF=(√2/4)/((1/2)·√3/2)=(√2/4)/(√3/4)=

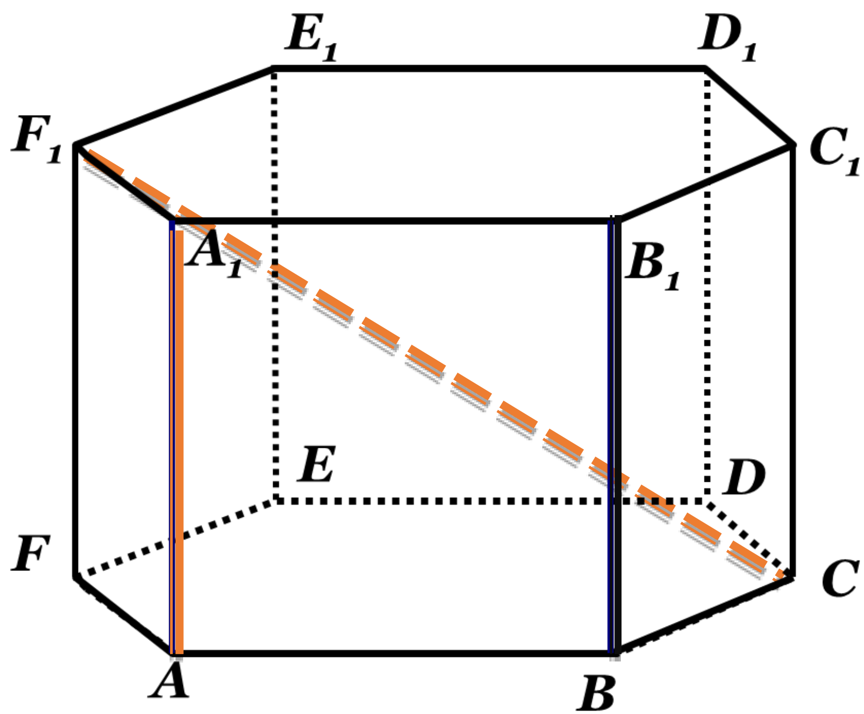
=√2/√3=√6/3.

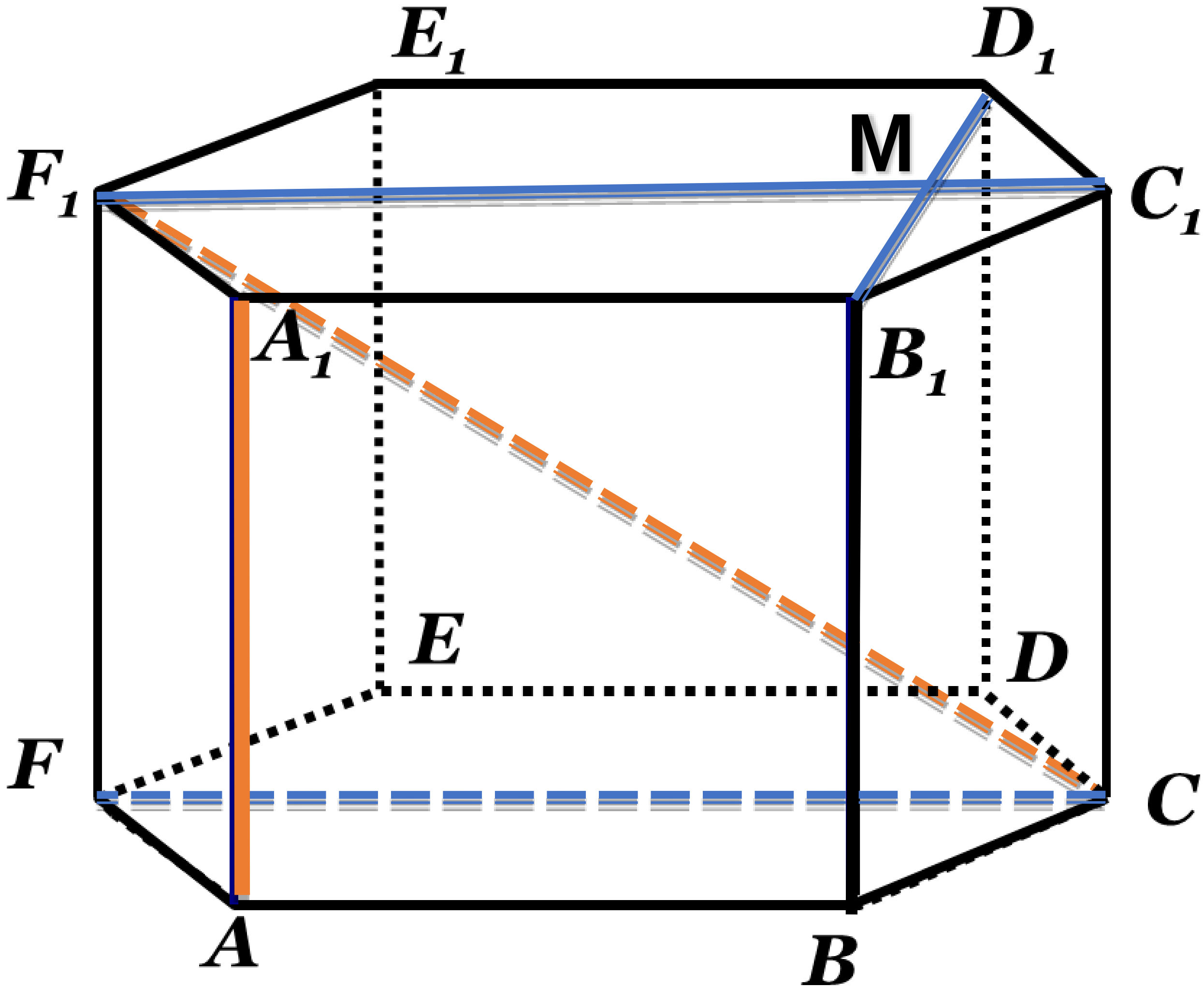
Ответ: √6/3



Тренировочная задача

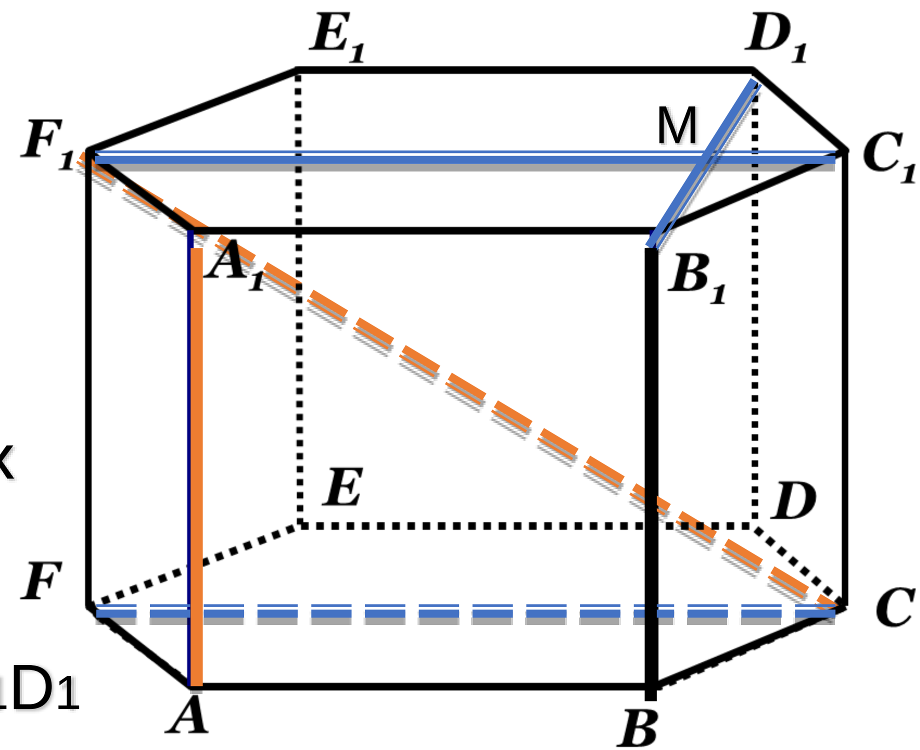
В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, все ребра которой равны 1. Найдите расстояние между прямыми AA_1 и CF_1.





E1
D1
M
F1
C1
A1
B1
E
D
F
C
A
B

Прямые AA_1 и CF_1 - скрещивающиеся
Расстояние между прямыми AA_1 и CF_1 равно расстоянию между параллельными плоскостями (ABB_1A_1) и (FCC_1F_1), в которых лежат эти прямые.
$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ - правильный шестиугольник; $A_1B_1 \parallel F_1C_1$; B_1D_1 F_1C_1;$\perp B_1M \cap F_1C_1=M$
B_1M – искомое расстояние
Из $\Delta B_1C_1D_1$ по теореме косинусов $B_1D_1=\sqrt{3}$,
$B_1M =1/2 \cdot B_1D_1=\sqrt{3}/2$
Ответ: $\sqrt{3}/2$



Спасибо за внимание!

ЦНППМ